Resumen AM1 Teórico

Cátedra: Análisis Matemático 1

Año: 2020

Curso: 1R3

Por: Enrique Walter Philippeaux

Punto de acumulación y Puntos Aislados:

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Sea c un num. $\mathbb{R}$.

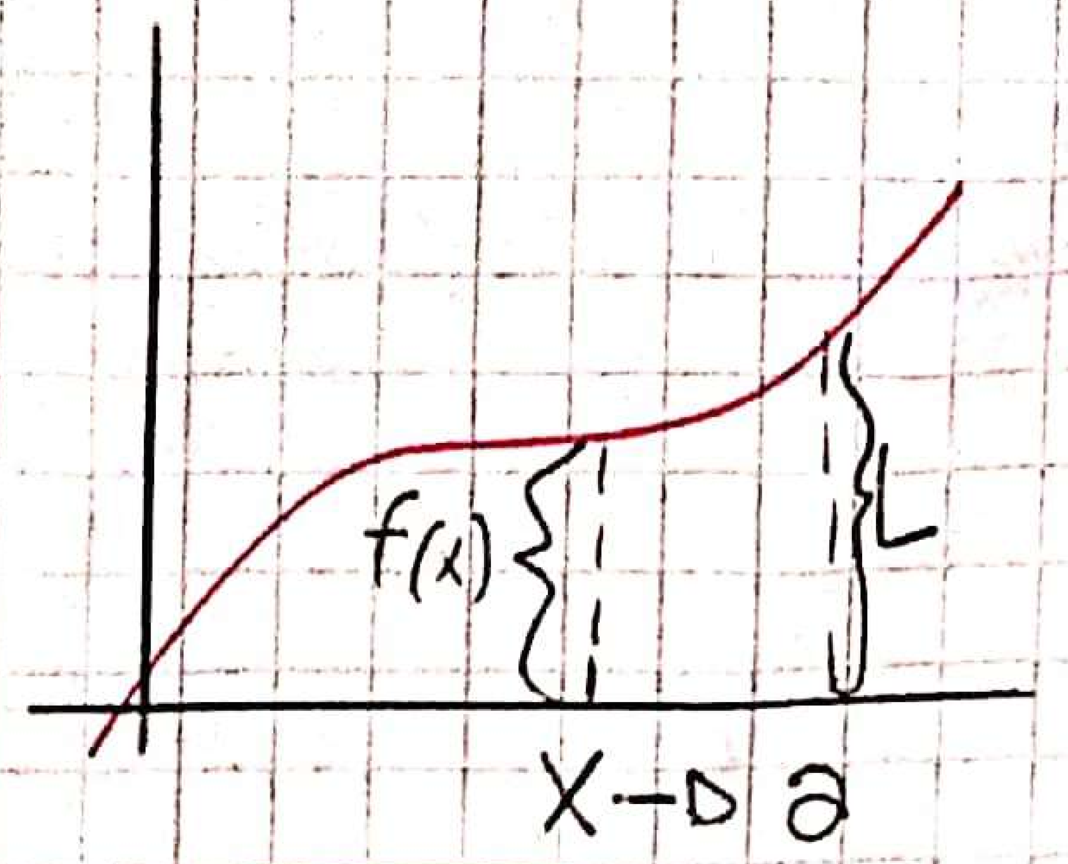
c es un punto de acumulación de A si para todo radio $r > 0$ el entorno reducido con centro c y radio r intersecta con A

$$V_r'(c) \underbrace{\cap}_{\text{Intersecta}} A \neq \emptyset$$

c es un punto Aislado de A si para todo radio $r > 0$ el entorno reducido con centro c y radio r no Intersecta con A

$$V_r'(c) \cap A = \emptyset$$

Limites Laterales: $\boxed{LLI}$



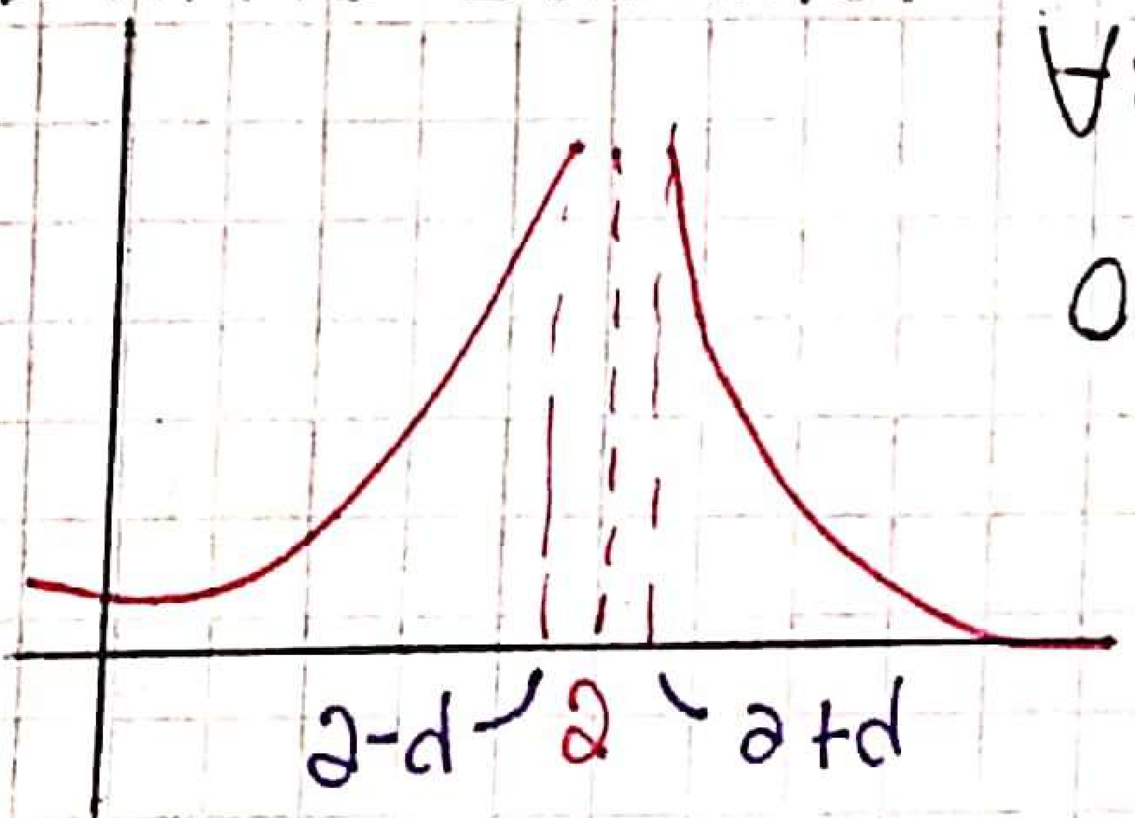
$\lim_{x \to a^-} f(x) = LLI$ Elaboro semi entorno Izquierdo

$\forall \varepsilon > 0\ \exists d > 0 / \forall x: x \in \mathbb{R} \wedge a-d < x < a \Rightarrow |f(x) - L_i| < \varepsilon$

$\boxed{LLD}$

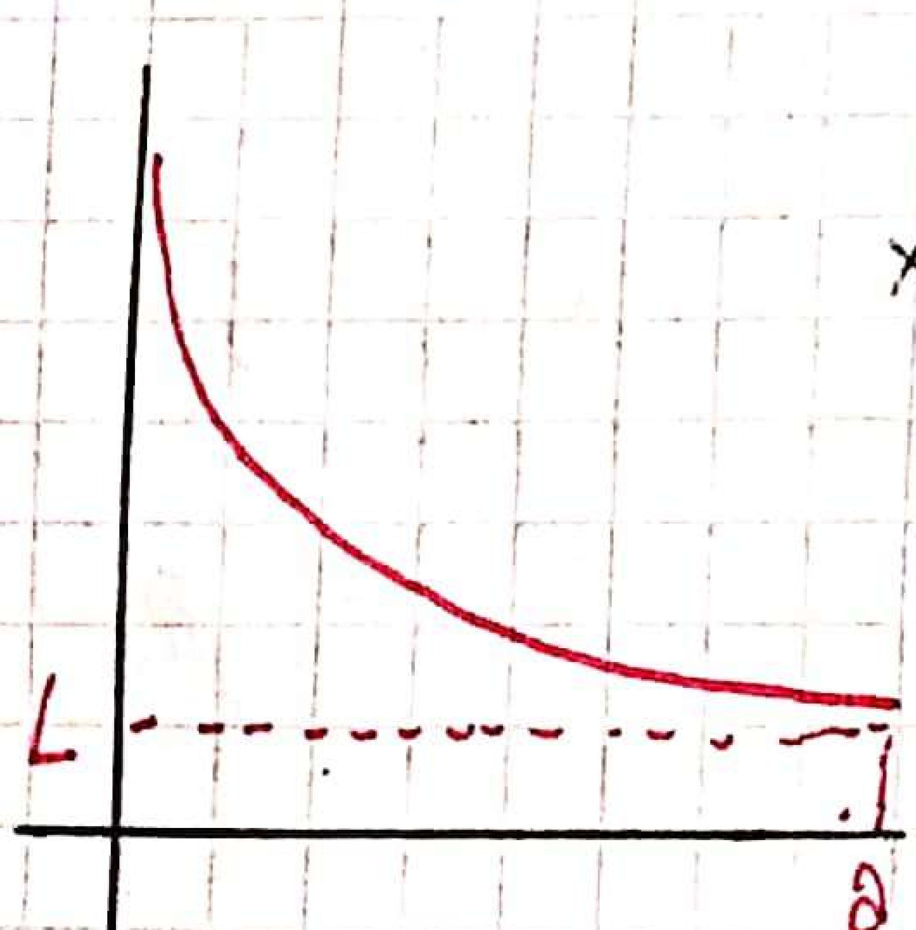
$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists d > 0}_{\text{Entorno}} \underset{\text{donde}}{/} \underbrace{\forall x: x \in \mathbb{R}}_{\text{Valores de X en los reales}} \overset{\text{Cumplan}}{\wedge} \underbrace{a < x < a+d}_{\text{una aprox. por derecha a X en a}} \overset{\text{Para que}}{\Longrightarrow} \underbrace{|f(x) - L_d| > \varepsilon}_{\text{obtenga una aprox por derecha a f(x), pero donde no se tome el valor X, y este infinitesimamente cerca.}}$$

Límite Infinito:



$\forall \varepsilon > 0\ \exists d > 0 / \forall x: x \in \mathbb{R} \wedge$
$0 < |x-a| < d \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Límites en el Infinito:

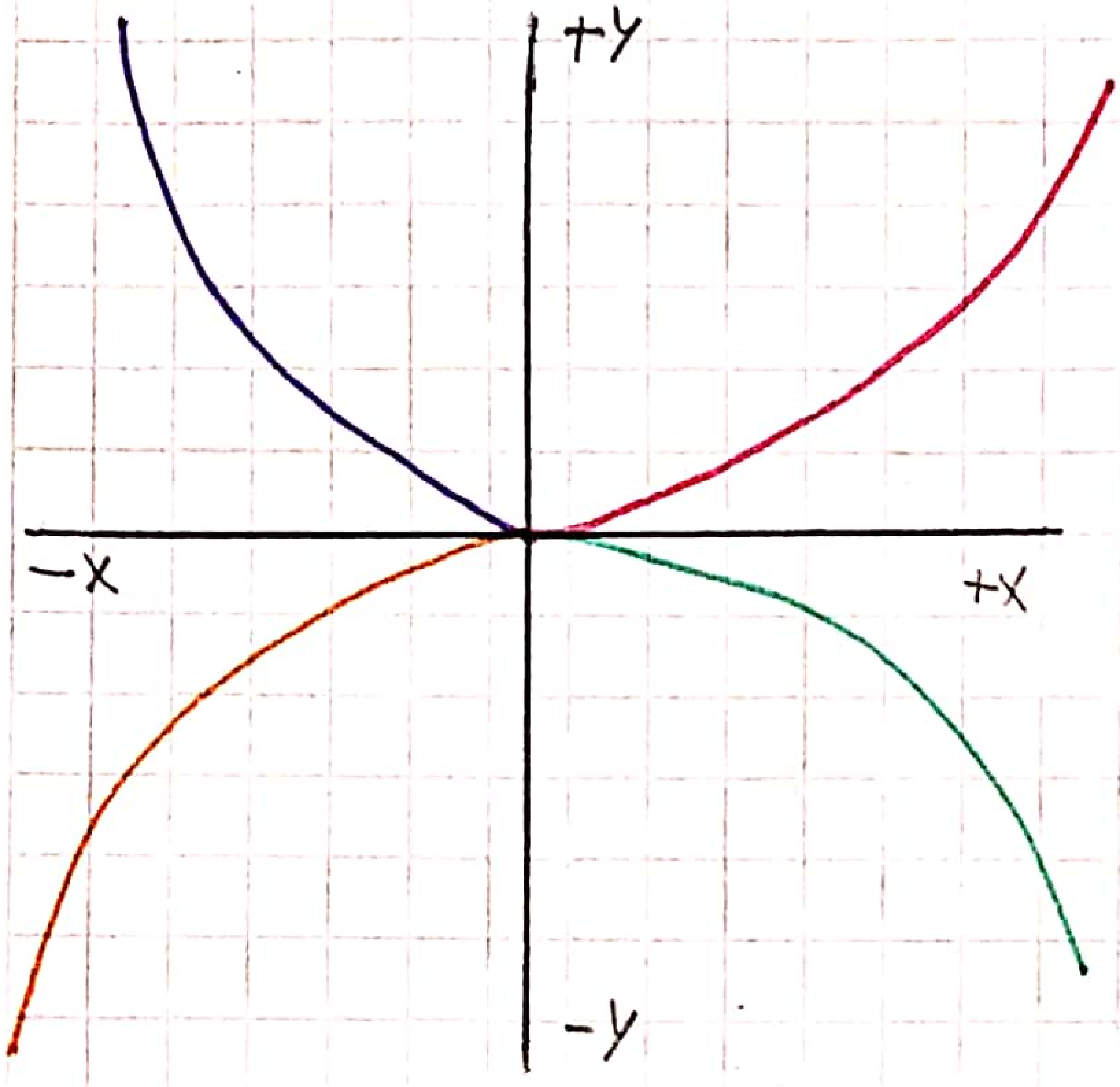


$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \quad \overbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists d < 0}^{\text{entorno}} / \overbrace{\forall x: x \in \mathbb{R}}^{x \in \mathbb{R}} \wedge$$

$$\underbrace{|x| > d}_{|x|>d} \underset{\text{se aproxime}}{\Longrightarrow} \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{\text{a un un valor en un entorno infinitesimamente pequeño}}$$

Por Cada valor de x tan grande como quiera

Limites en el infinito



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, d < 0 \ / \ \forall x : x \in \mathbb{R} \ \wedge$$
$$x > d \Longrightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, d < 0 \ / \ \forall x : x \in \mathbb{R} \ \wedge$$
$$x > d \Longrightarrow |f(x)| < -\varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, d < 0 \ / \ \forall x : x \in \mathbb{R} \ \wedge$$
$$x < -d \Longrightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, d < 0 \ / \ \forall x : x \in \mathbb{R} \ \wedge$$
$$x < -d \Longrightarrow |f(x)| < -\varepsilon$$

$\Longrightarrow$ Si $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x) \Longrightarrow$

$\ldots \forall x \in E_r(a) \quad f(x) < f(g)$

Límites:

$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists d > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x-a| < d \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = Li \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - Li| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = Ld \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - Ld| > \varepsilon$

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x > \delta \Rightarrow |f(x)| < -\varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge x < -\delta \Rightarrow |f(x)| < -\varepsilon$

Teorema de las desigualdades

siendo $\lim_{x \to a} f(x) = L \wedge \lim_{x \to a} g(x) = M$

$L > M \Rightarrow \exists E'a /$ se verifica que $f(x) > g(x) \; \forall x \in E'a$

Teorema recíproco

$\exists E'a /$ se verifica que $f(x) > g(x) \; \forall x \in E'a \Rightarrow L > M$

1 Teorema $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en $x = a$) y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

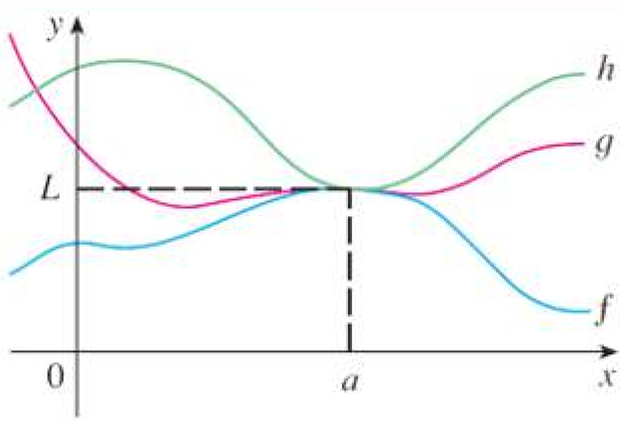
$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 El teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



6 Definición La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

4 Teorema Si f y g son continuas en $x = a$ y $x = c$ es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

8 Teorema Si f es continua en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.
En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

IMAGEN: mayor subconjunto de los reales para el cual todos sus elementos son resultado de la regla de asignación para al menos un elemento del dominio.

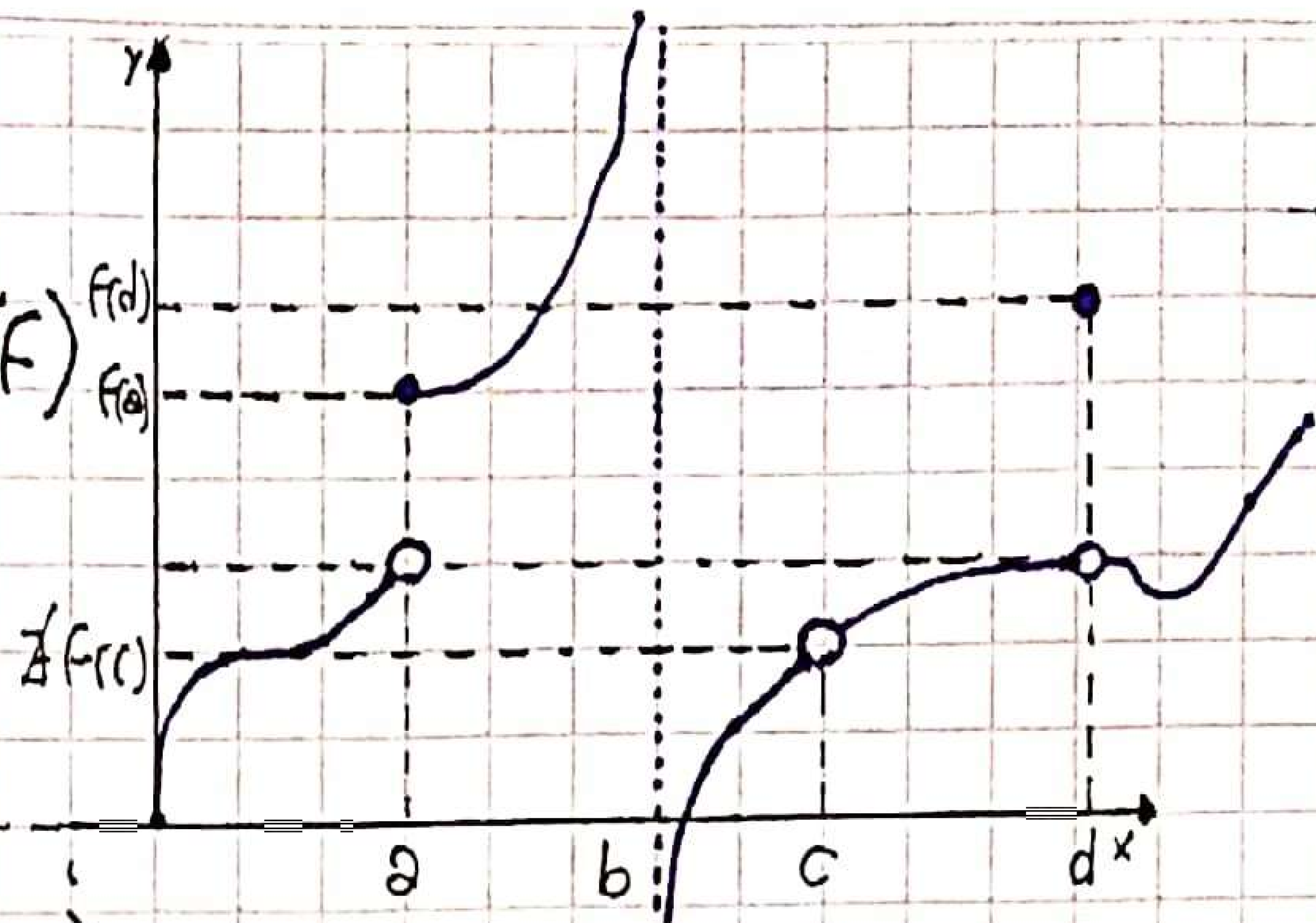
Teorema de **Bolzano**: En una funcion acotada en [a,b] si se cumple que f(a y f(b) son de diferente signo entonces existe un x=c tal que f(c)=0

Continuidad:

① $\exists f(a) \therefore a \in Dom(f)$

② $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



Condiciones

	1	2	3
a	✓	X	–
b	X	X	–
c	X	✓	–
d	✓	✓	X

$\lim_{x \to a}$ existe cuando el LLI = LLD

Sí $\lim_{x \to a^-} = \lim_{x \to a^+} \Rightarrow \lim_{x \to a} \exists$

a DISCONTINUIDAD NO EVITABLE SALTO FINITO

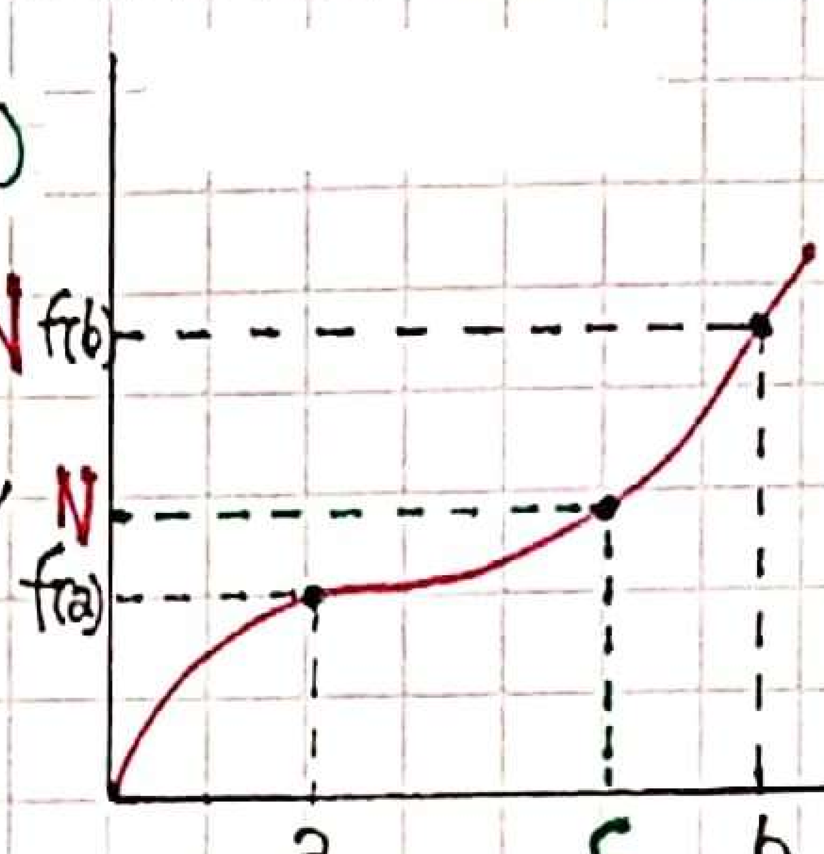
b DISCONTINUIDAD NO EVITABLE SALTO INFINITO

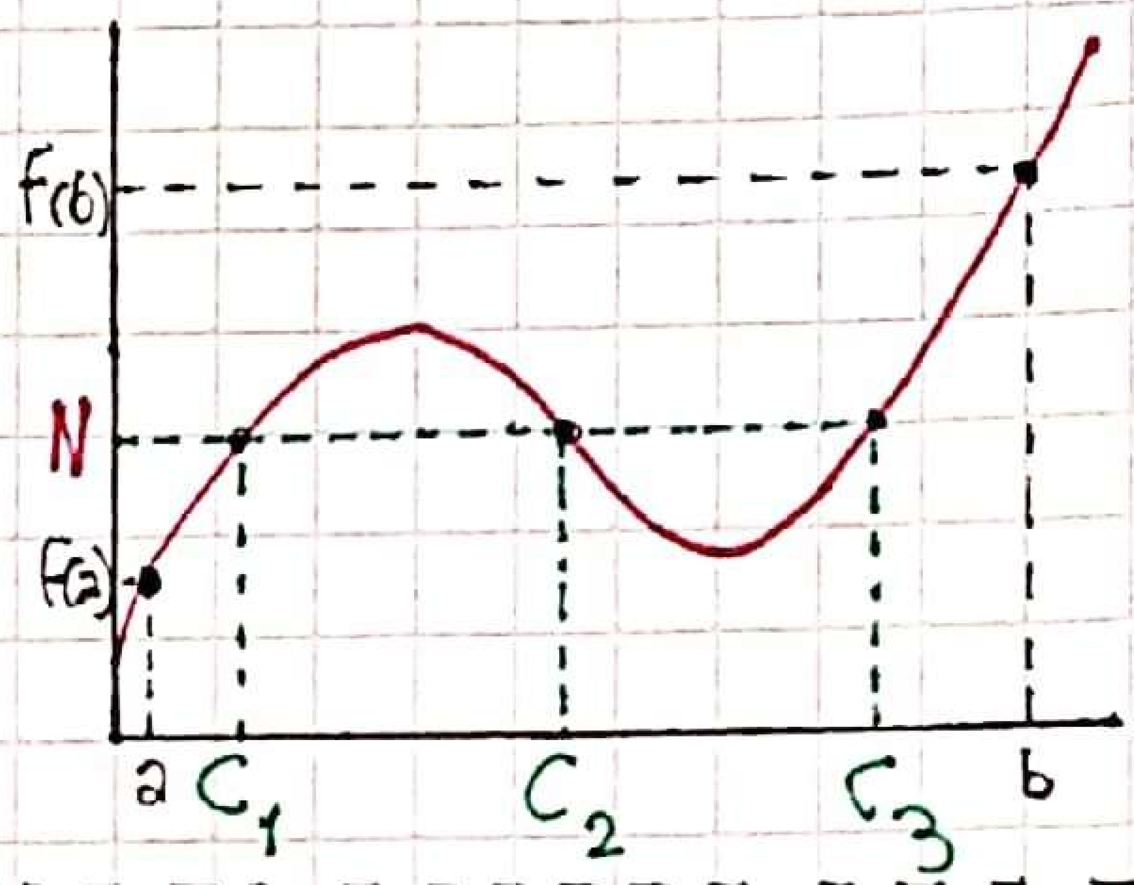
c Discontinuidad EVITABLE

d DISCONTINUIDAD EVITABLE

T. Valor **Intermedio** (DARBOUX)

- Si f es continua en $[a; b]$ y sea N cualquier núm entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$, existirá un número c tal que $f(c) = N$.

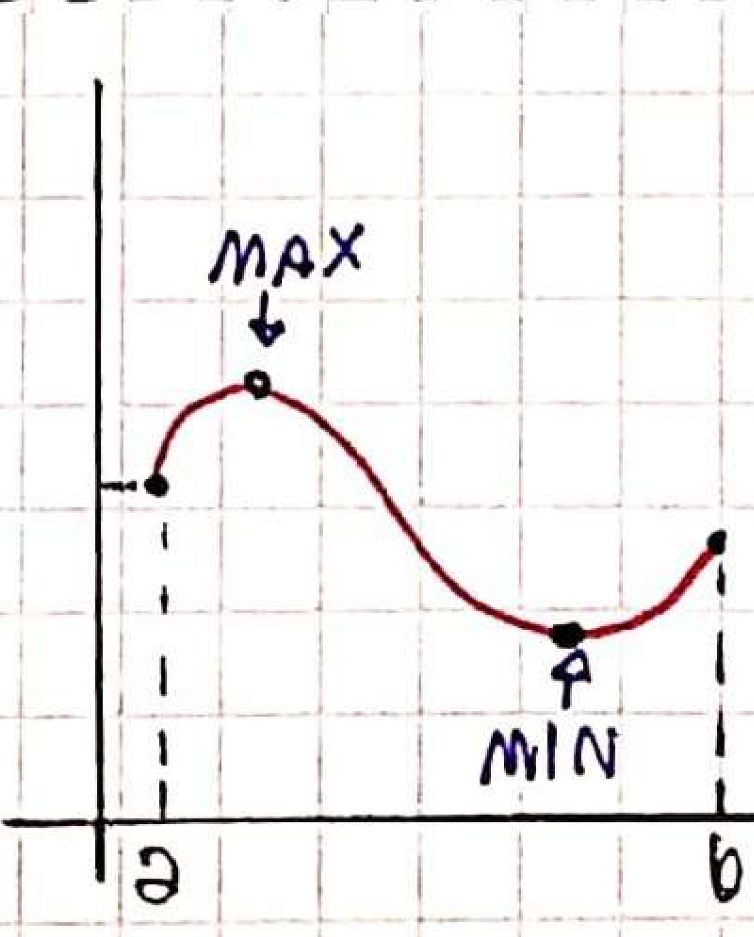


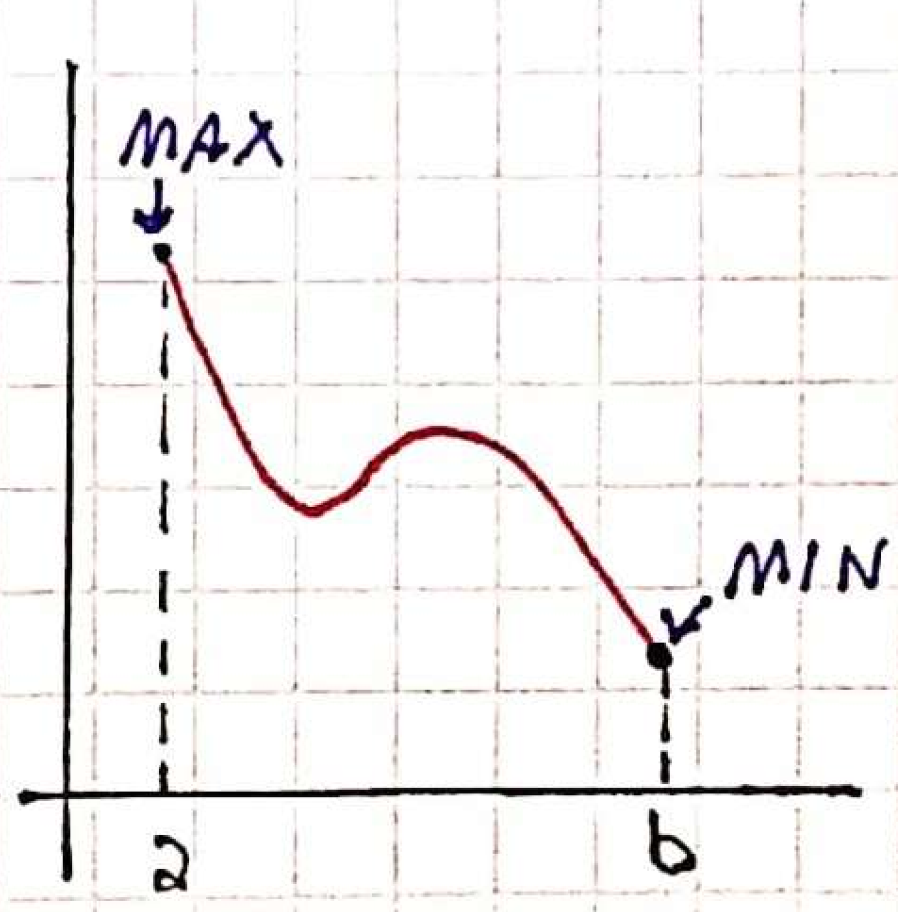


T. de WEIERSTRASS (EXISTENCIA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS)

- Sí $f(x) \neq cte$ y está definida y es continua en un intervalo $[a; b]$, $f(x)$ alcanzará al menos un MAX. y MIN ABSOLUTOS

(solo Afirma que existen los MAX y MIN)



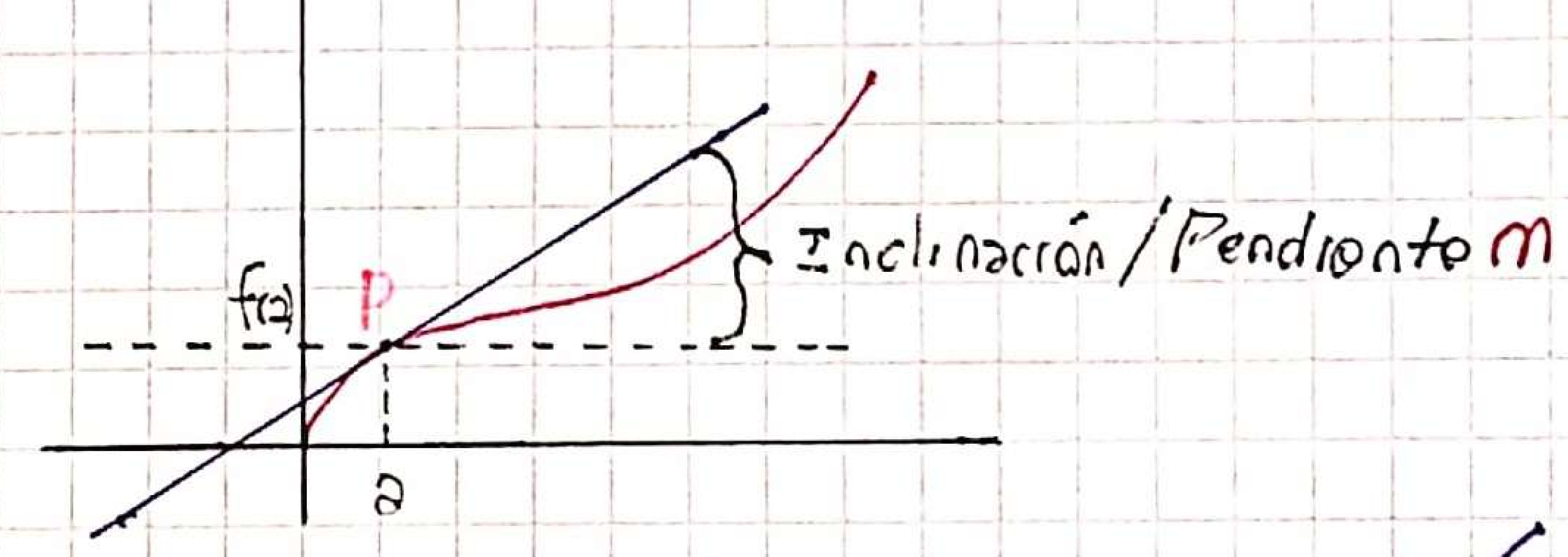


Derivada:

- pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en un punto $P = (a; f(a))$

Recta tangente: Fórmula:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)}_{\text{Cociente Incremental}}$$

$\nexists f'(a)$ si a es un punto anguloso

$\nexists f'(a)$ si f no es continua en a

Si $\exists f'(a) \Rightarrow$ f es continua en a

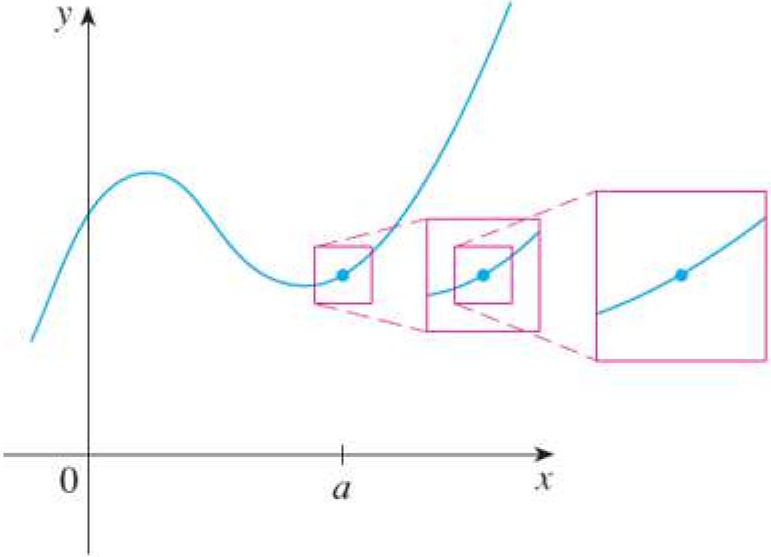


FIGURA 8

f es derivable en $x = a$.

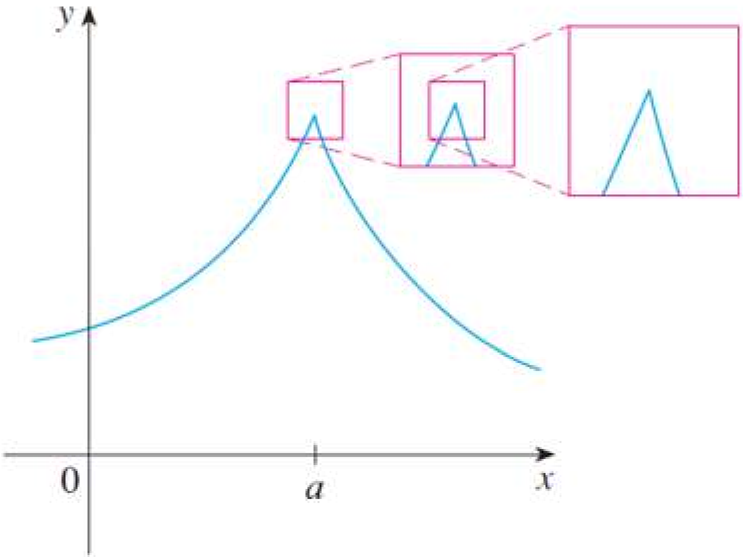
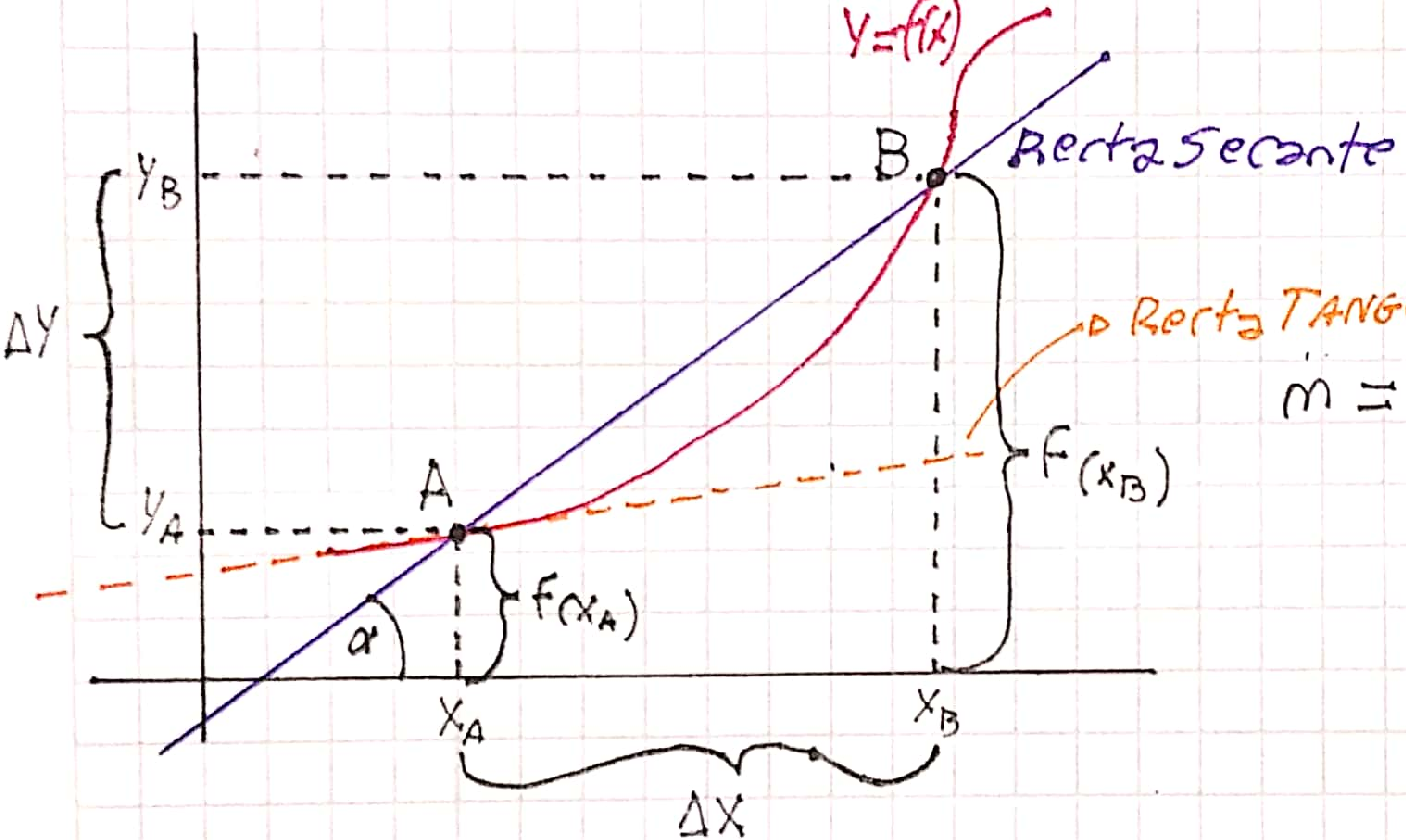


FIGURA 9

f no es derivable en $x = a$.

Velocidad de crecimiento en un Intervalo:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha$$

$\boxed{\text{Teorema de Rolle}}$ → ASEGURA la existencia de $f'_{(c)}=0$

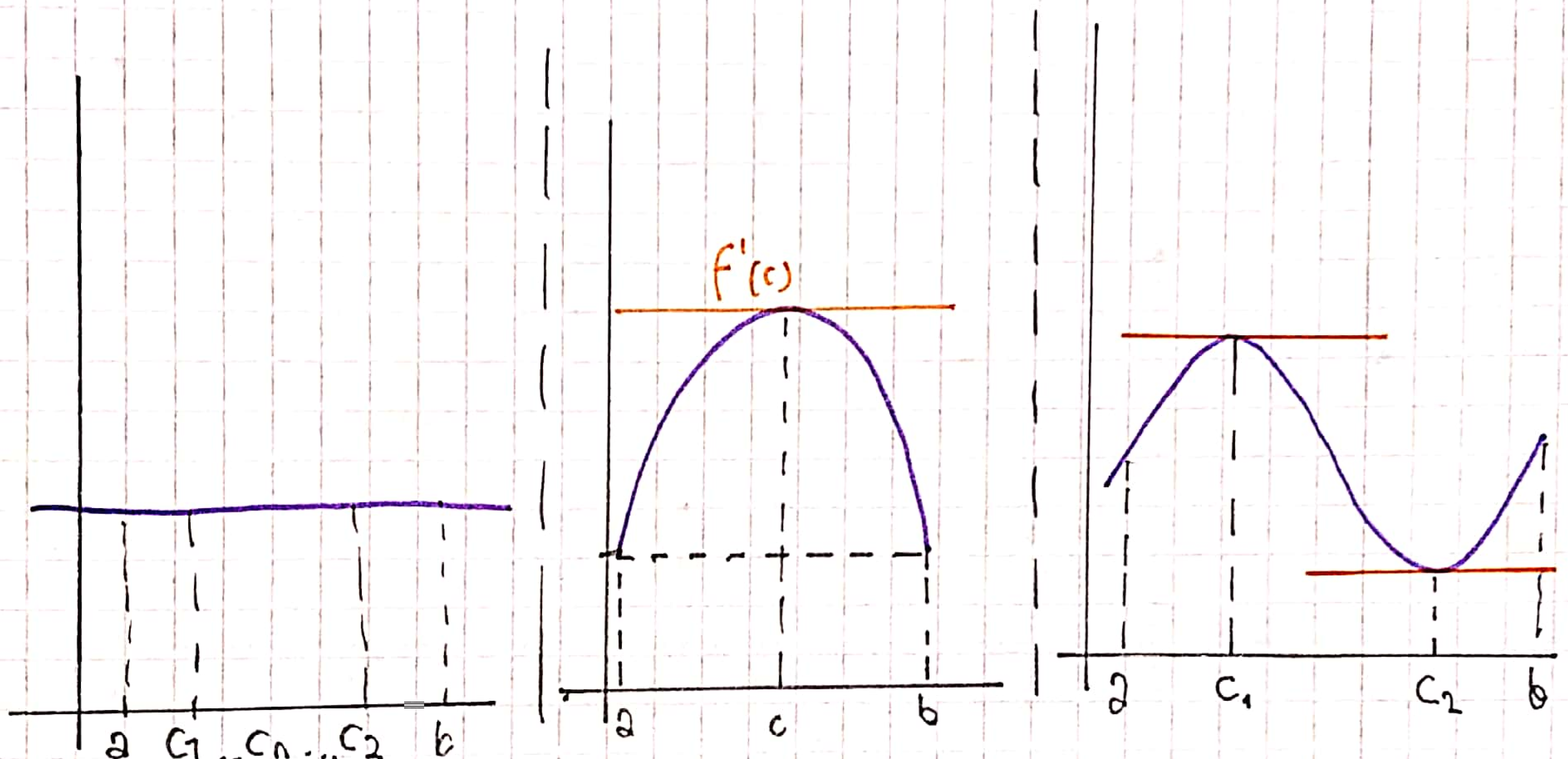
Si f es una función que satisface las sig Hipótesis:

1. f es continua en $[a,b]$ → evaluado con limites laterales

2. f es derivable en (a,b) → no hay puntos Angulosos

3. $f(a) = f(b)$ → parto de una altura, llego a una altura igual

→ Entones existe un número c en (a,b) tal que $f'(c)=0$



PP: Analice si cierta función dada por la gráfica, se le puede aplicar el teorema de Rolle

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{-h} = f'(c)\geq 0\\
&\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{+h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{+h} = f(c)\leq 0
\end{aligned}\right\} \therefore\ 0\leq f'(c)\leq 0 \Downarrow f'(c)=0$$

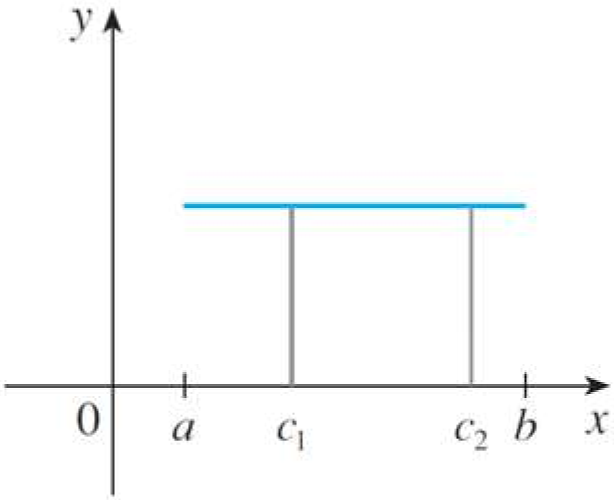
Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

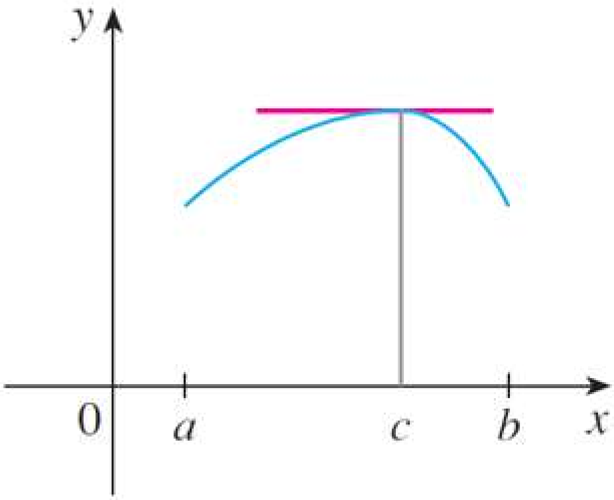
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

3. $f(a) = f(b)$

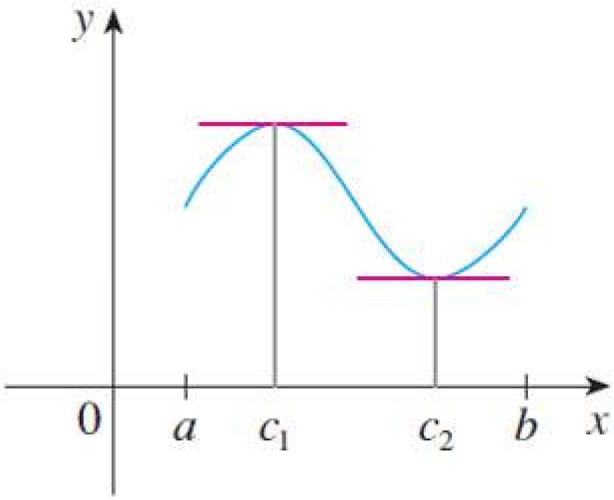
entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



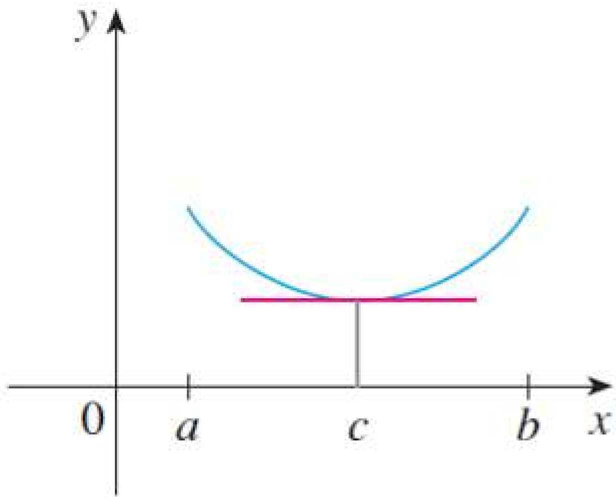
a)



b)



c)



d)

derivabilidad

TEOREMA DEL VALOR MEDIO (LAGRANGE)

Si f es una función que satisface las sig. hipótesis:

1. f es continua en $[a, b]$
2. f es derivable en (a, b)

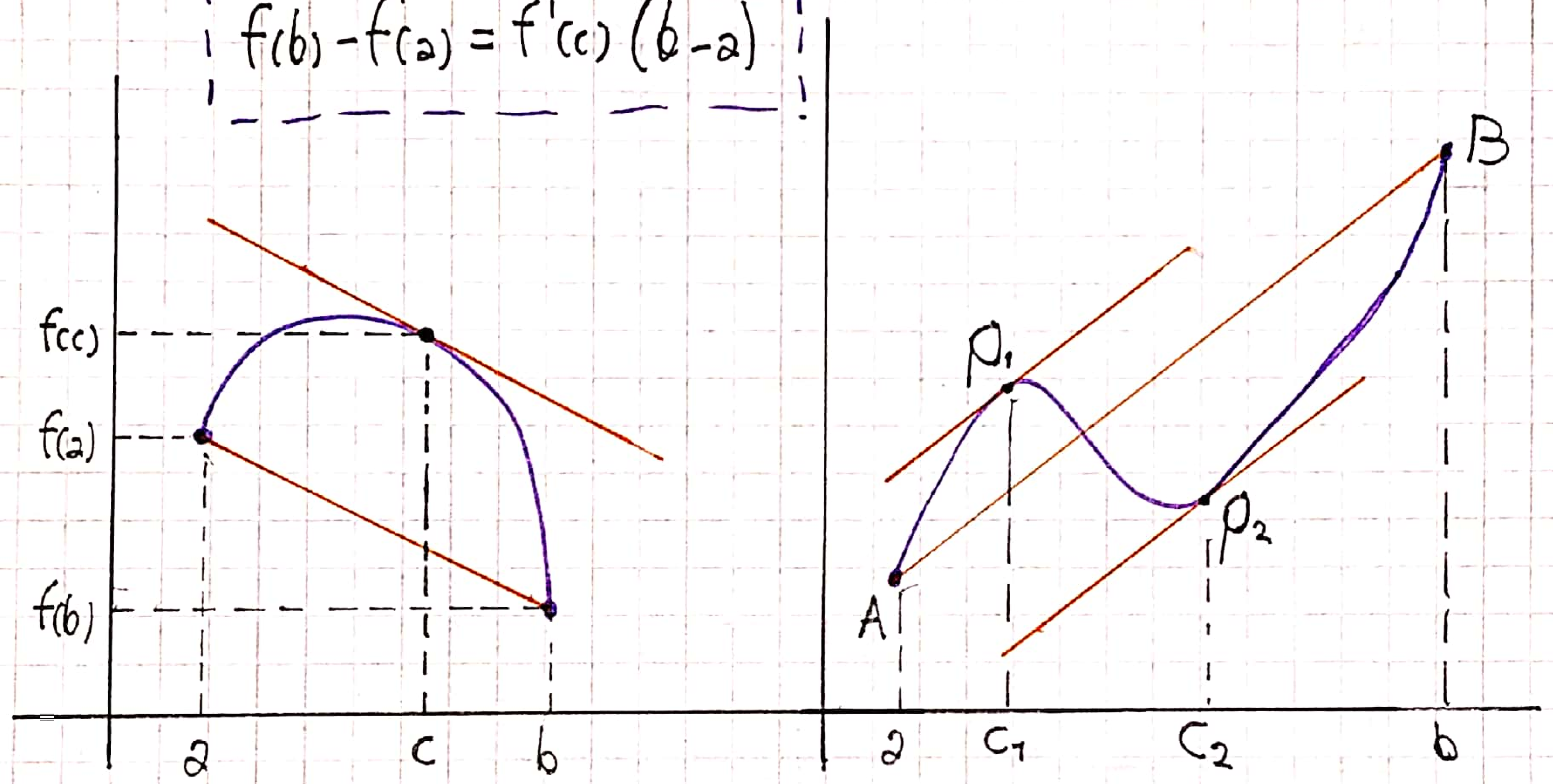
entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* Relaciona incremento de y con un incremento en x

ó equivalentemente:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



* la pendiente de la recta secante AB es:

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{m_{AB} = f'(c)}$$

Pendiente de recta secante — Pendiente

* Siempre existirá si f cumple con las dos hipótesis, un punto en $x = c$ y $f(c)$ que cumpla

$$m_{AB} = f'(c)$$

O sea

Si f es continua en $[a, b]$, y f es derivable en (a, b),

$\exists c$ tal que $f'(c) = m_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

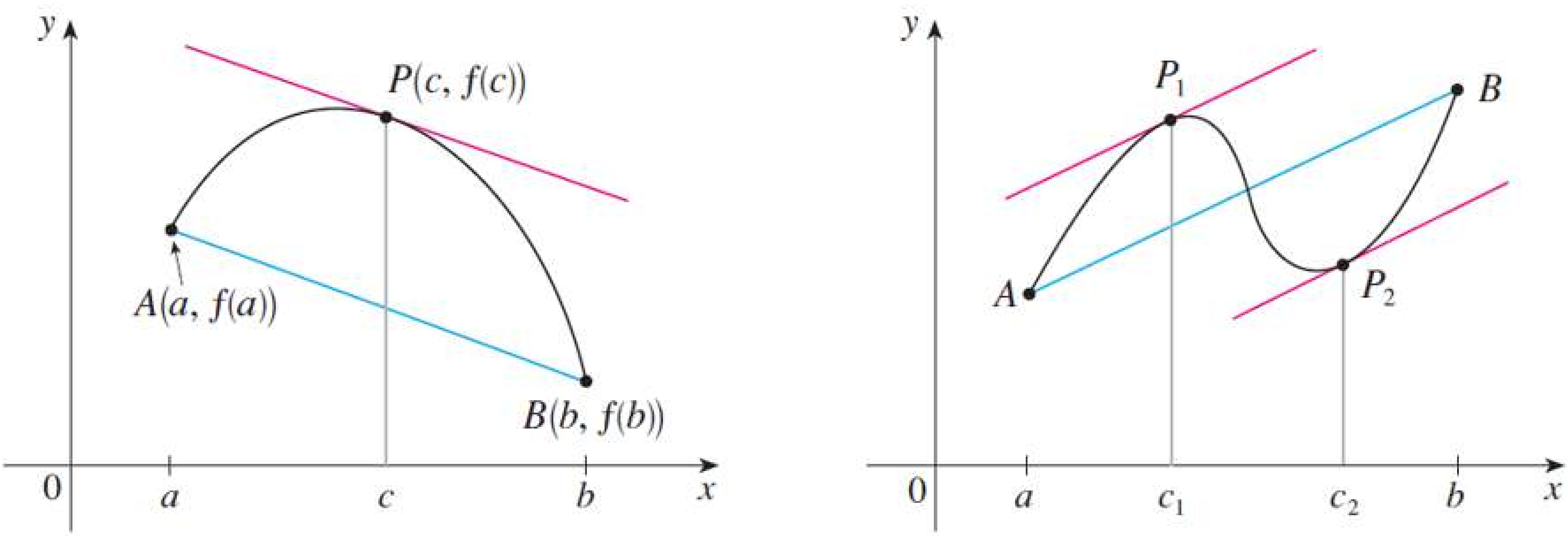
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

1
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

2
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



RELACIÓN CONTINUIDAD ⟺ DERIVABILIDAD:

→ Si $f(x)$ es derivable en $x=a$, $f(x)$ es continua en $x=a$.

→ demostrar $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Updownarrow$ son equivalentes.

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a) \right) = 0$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot (x - a) \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)}_{\text{def. de derivada}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} (x - a)}_{= 0}$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

▸ Caso de no derivable:

$= \infty \cdot 0 =$ Ind. (cuando $f(a) \to \pm\infty$)

y $f(x) = |x|$ / $x \to 0$.

→ Que sea continua no significa que sea derivable.

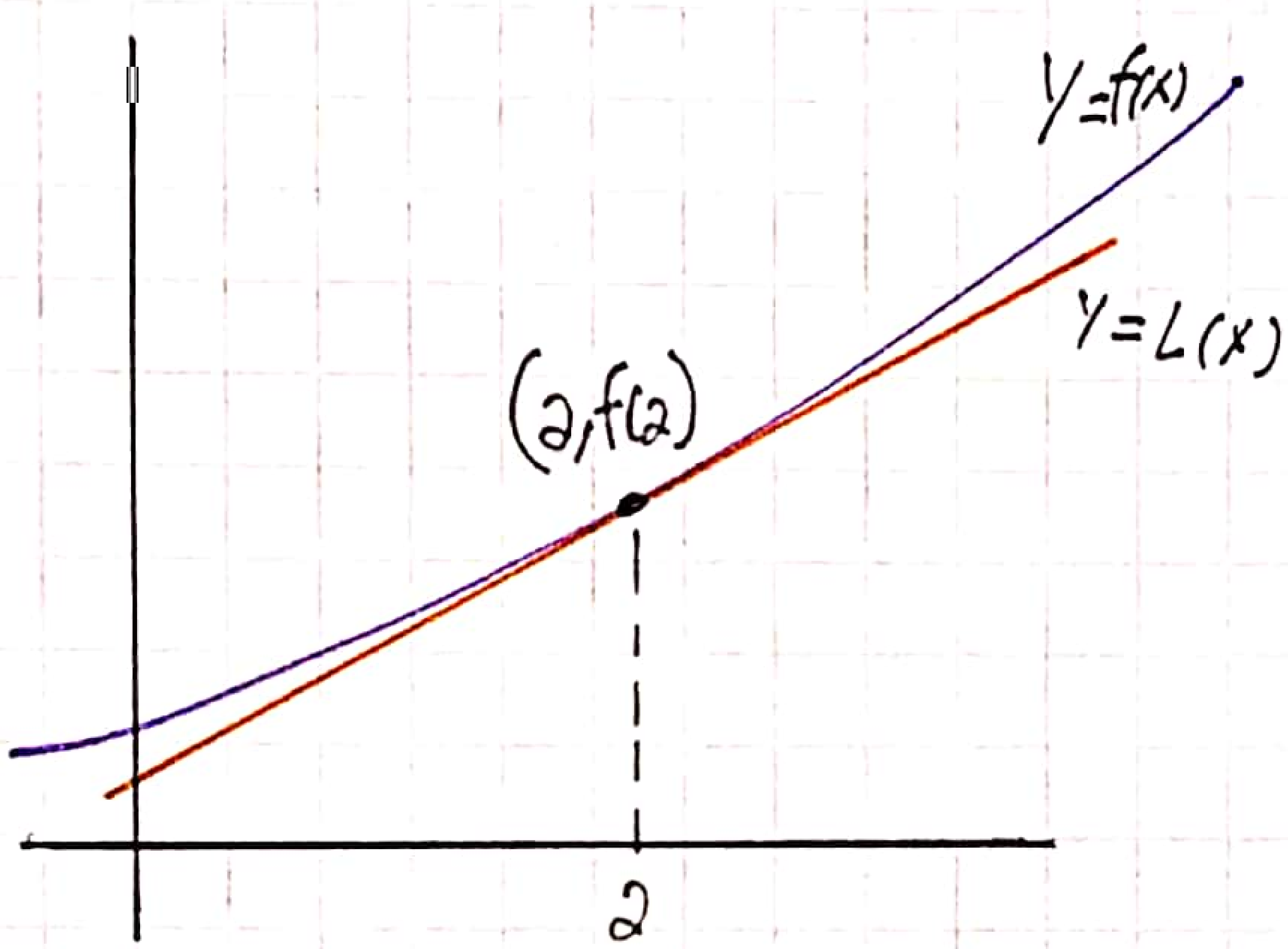
APLICACIONES DE LA DERIVADA (CONTINUACIÓN)

APROXIMACIÓN LINEAL Y DIFERENCIALES:

▶ Aproximo a la función por su recta tangente

$$f(x) \approx f'(a).(x-a) \quad y \quad L(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$$

$$f(x) \approx L(x)$$

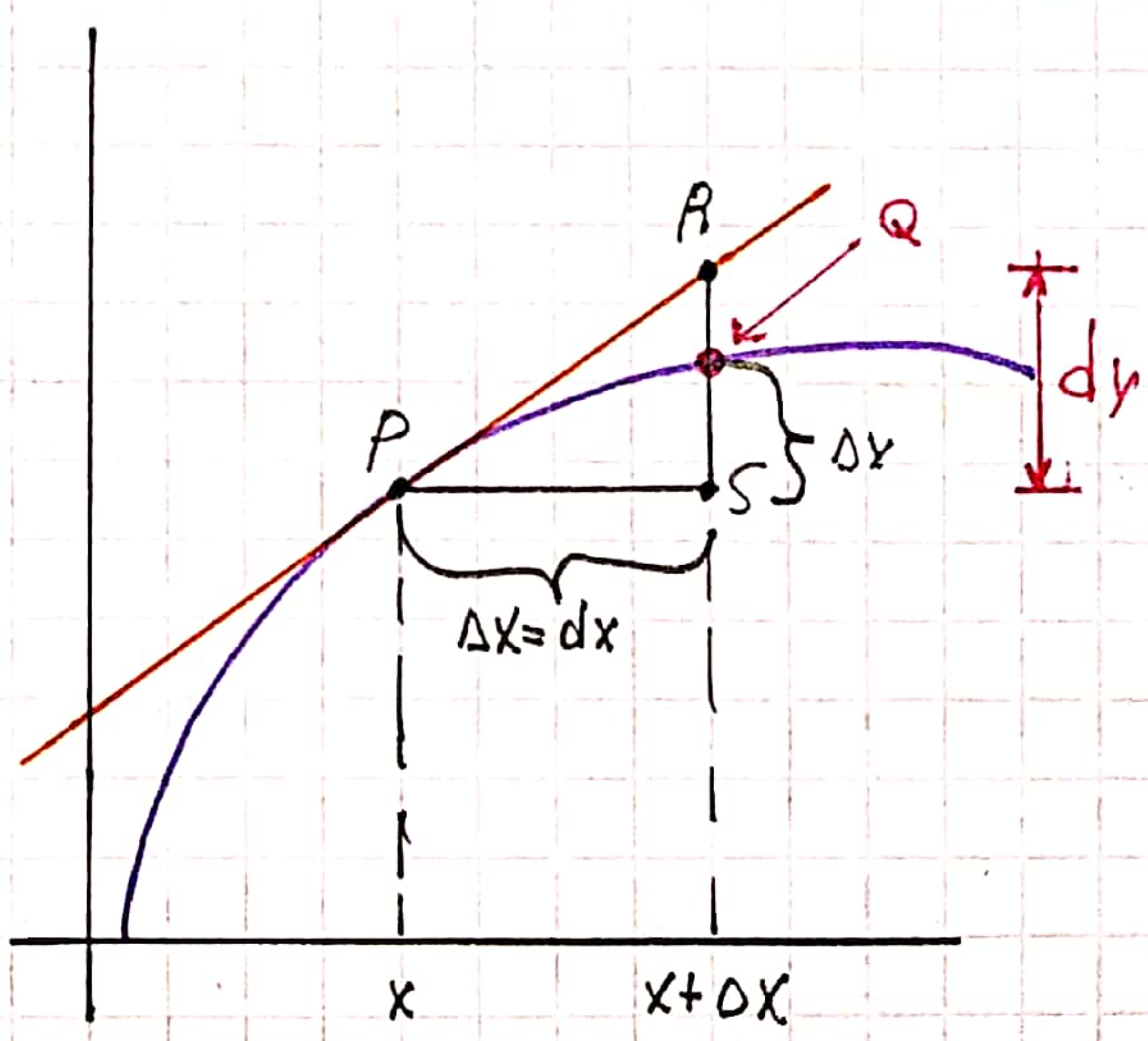


DIFERENCIAL:

La diferencial dy está definida en términos dx mediante la ecuación:

$$dy = f'(x).dx$$

$$\boxed{dy \approx \Delta y}$$



Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

$$dy = f'(x)dx \tag{3}$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

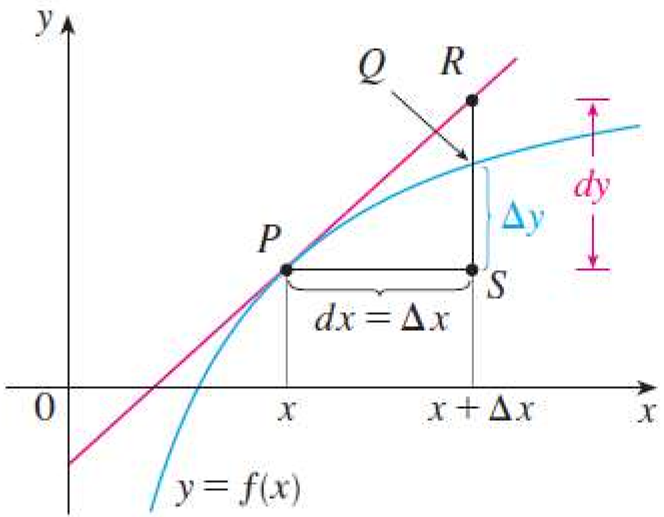


FIGURA 5

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

Diferencial

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ Recordando la relación fundamental del límite

Si $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = L \iff f(x) - L = \mathcal{E} \iff f(x) = L + \mathcal{E}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \mathcal{E}$$

$$\Delta y = (f'(x) + \mathcal{E}) . \Delta x$$

Δy = infinitésimo compuesto formado por la suma de dos infinitésimos de distinto orden

- $f'(x) . \Delta x$ = como $f'(x)$ generalmente es finita y distinta de cero, $f'(x) . \Delta x$ es un infinitésimo de igual orden que Δx y es el de menor orden.
- $\mathcal{E} . \Delta x$ = como $\mathcal{E} \to 0$, este infinitésimo es de orden superior ya que tiende más rápidamente a cero

$f'(x) . \Delta x$ = parte principal de Δy = Diferencial de la función = dy

NOTA:

$$\boxed{dy = f'(x) . \Delta x}$$

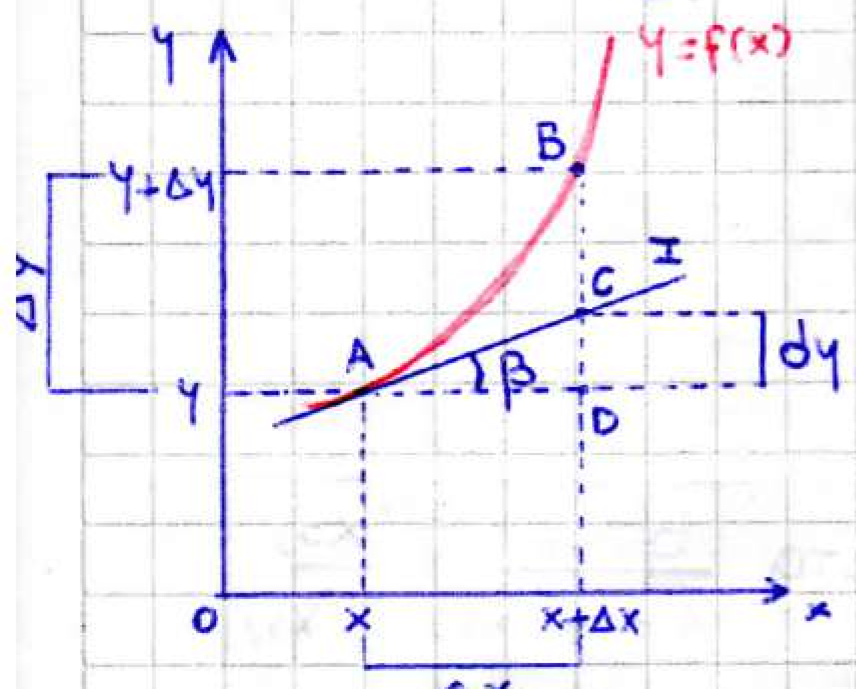
Expresión de la derivada en función de las diferenciales: $\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$

Derivada de Leibnitz

dy y Δy no son, en general, iguales

Podemos considerar a Δy aproximadamente igual a dy cuando dx es pequeño

Interpretación geométrica del diferencial



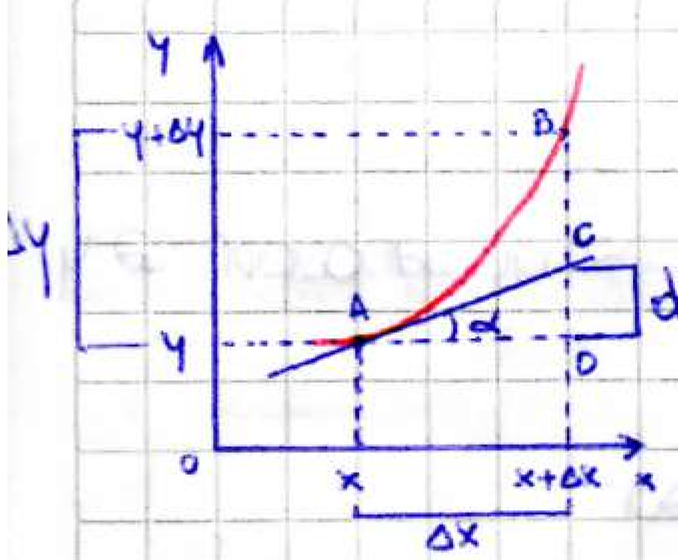
$$\Delta y = \overline{DC} + \overline{CB} \quad ; \quad Tg\,\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Delta y = (f'(x) + \mathcal{E}) . \Delta x$$

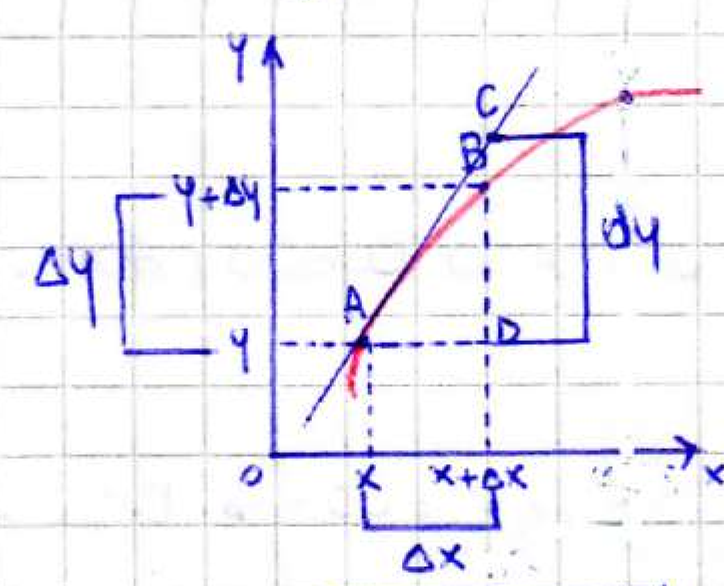
$$\Delta y = dy + \mathcal{E}\,\Delta x$$

$$\Delta y = dy + \mathcal{E}\,dx$$

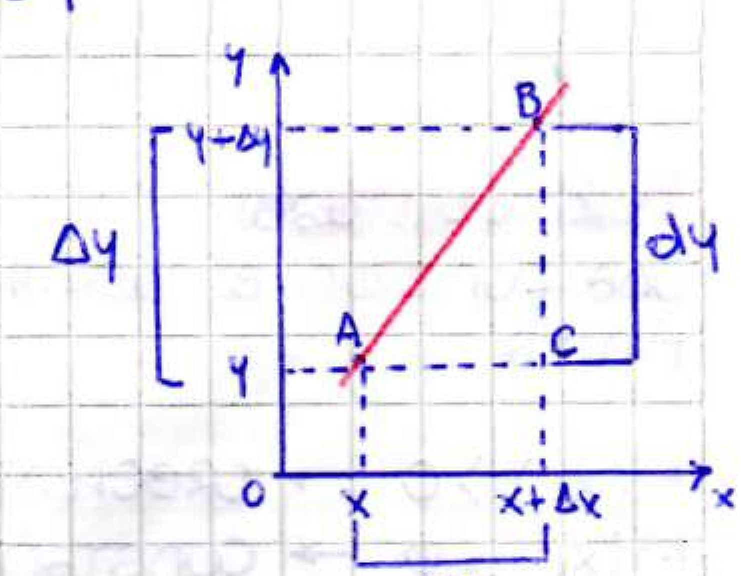
El dy en el punto "A" no es el incremento DB (Δy) que adquiere la ordenada cuando se le da a la abcisa un incremento dx, sino el incremento DC que adquiere la ordenada de la tangente a la curva en el punto "A"



$\boxed{\Delta y > dy}$



$\boxed{\Delta y < dy}$



$\boxed{\Delta y = dy}$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY:

Si f y g son continuas en $[a, b]$

Si f y g son derivables en (a, b)

Sí $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b)

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

REGLA DE L'HOPITAL (APLICACIÓN de DERIVADAS A LÍMITES)

Sí f y g son derivables

sí $g'(x) \neq 0$ en un Intervalo I que contiene a (excepto posiblemente a)

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\text{o que} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(si presenta forma Indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

DEMOSTRACIÓN:

(1) Suponemos $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(2) Planteamos:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sí } x \neq a \\ 0 & \text{sí } x = a \end{cases} \quad / \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{sí } x \neq a \\ 0 & \text{sí } x = a \end{cases}$$

F es continua en I porque f es continua en $\{x \in I / x \neq a\}$

y $\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$

Lo mismo para G.

(3) Según Teorema de Cauchy, $\exists y$ tal que $a < y < x$

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(A)}{G(x) - G(a)} = \cancel{\frac{F(x)}{F(a)}} \frac{F(x)}{G(x)}$$

(4) Planteo $\boxed{a < y < x \to x \to a \therefore y \to a}$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

→ PRODUCTOS INDETERMINADOS:

$$f.g \to \underbrace{f.g = \frac{f}{1/g}}_{\text{Artificio para reescribir el cociente}} = \frac{g}{1/f}$$ } con esto, uso L'Hopital

EJEMPLOS: POTENCIAS INDETERMINADAS

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = A$$

$$\log_n\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) = \ln A$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln (x^x)\right) = \ln A$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} (x . \ln x)}_{= \ln x^x} = \ln A$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = (\text{L'hopital}) = \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{x} = -x \Rightarrow 0$$

$$0 = \ln A \rightarrow \log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

$$e^0 = e \qquad \log_e A = c \leftrightarrow e^c = A$$

$$c = 0$$

$$e^0 = A \qquad e^0 = A$$

$$1 = A \qquad 1 = A$$

$$\lim_{x \to \infty} (e^x + 1)^{\frac{2}{x}} = A = e^2$$

$$\ln\left((e^x+1)^{\frac{2}{x}}\right) = \frac{2}{x} \cdot \ln (e^x+1)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \cdot \ln(e^x+1) = 0 . \infty = \ln A$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 \ln (e^x+1)}{x} \rightarrow \frac{(2 \ln (e^x+1))'}{(x)' \to 1} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{e^x+1} \cdot (e^x + 0)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hopital} \rightarrow \frac{(2.e^x)'}{(e^x+1)'} \rightarrow \frac{2 . e^x}{e^x + 0} = \frac{2e^x}{e^x} = 2$$

$$2 = \ln (A) \qquad \ln (A) = 2$$

$$A = e^2$$

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: APLICACIÓN DE DERIVADA
(EXTREMOS)

1 Sea c un número en el dominio D

Valor máximo absoluto de f sobre D sí $f(c) \geq f(x)$ para toda x en D

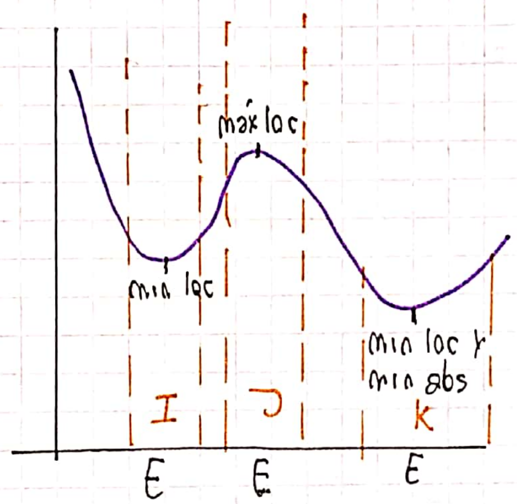
Valor mínimo absoluto de f sobre D sí $f(c) \leq f(x)$ para toda x en D

2 ~~Sea~~ El número $f(c)$ es un

entorno de radio R en centro C

Valor máximo local de f sí $f(c) \geq f(x)$ cuando x pertenece a $\underbrace{E_R(c)}$

Valor mínimo local de f sí $f(c) \leq f(x)$ cuando x pertenece a $E_R(c)$



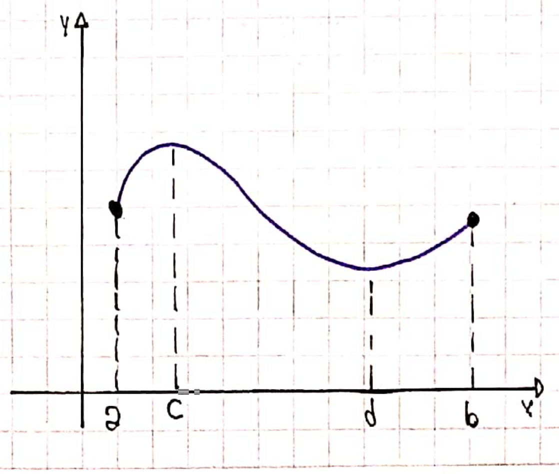
▷ Pueden no existir mínimos y maximos su existencia se da por el Teorema de Weierstrass

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si f es continua en el Intervalo $[a,b]$

entonces f alcanza un valor máx y mínimo absolutos $f(c)$ $f(d)$

en algunos numeros c y d en $[a,b]$



CONDICIÓN NECESARIA (NO SUFICIENTE) PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS:

TEOREMA DE FERMAT:

Si f tiene un máximo o mínimo local en $x=c$, y si $f'(c)$ existe, entonces:

$$f'(c)=0$$

Demostración:

1- Suponemos que f tiene un máximo local en $x=c$. Según la definición:
$f(c) \geq f(x)$ donde x es lo suficientemente cercano a c.

2. $f(c) \geq f(c+h) \rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0$

3. Dividimos de ambos lados de la desigualdad entre un numero positivo h
$h>0$ y h es suficientemente pequeña: (Buscamos la fórmula de derivada)

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

4. Tomamos LLD y LLI en la desigualdad.

LLD: a- $\underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{f'(c)} \leq \underbrace{\lim_{h\to 0^+} 0}_{0} = 0 \rightarrow f'(c) \leq 0$

LLI: b. $\underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{-h}}_{f'(c)} \geq \underbrace{\lim_{h\to 0^-} 0}_{0} = 0 \rightarrow f'(c) \geq 0$

me cambia la desigualdad

$$0 \leq f'(c) \leq 0$$

El único valor posible de $f'(c)$ es 0.

Índice

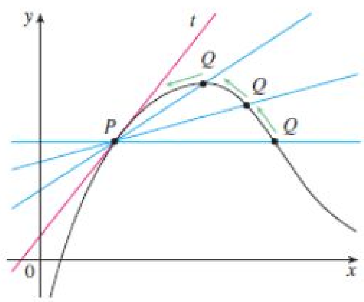
La derivada

Definición e interpretación:

- <u>Definición:</u> Una función f se dice derivable en **a** si existe el siguiente límite que llamaremos f'(**a**)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

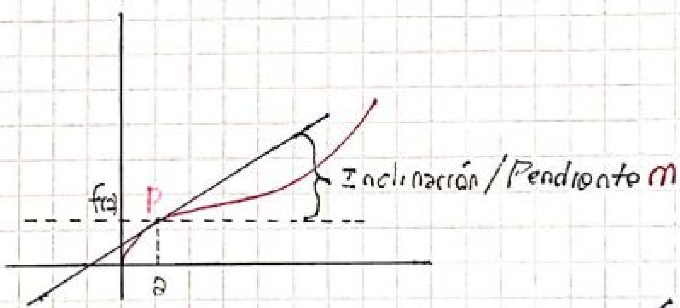
- <u>Interpretación:</u> La derivada de f en **a** representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en P=(**a**,f(**a**))



Derivada:

Pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en un punto P= (a; f(a))

Recta tangente: Fórmula:
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



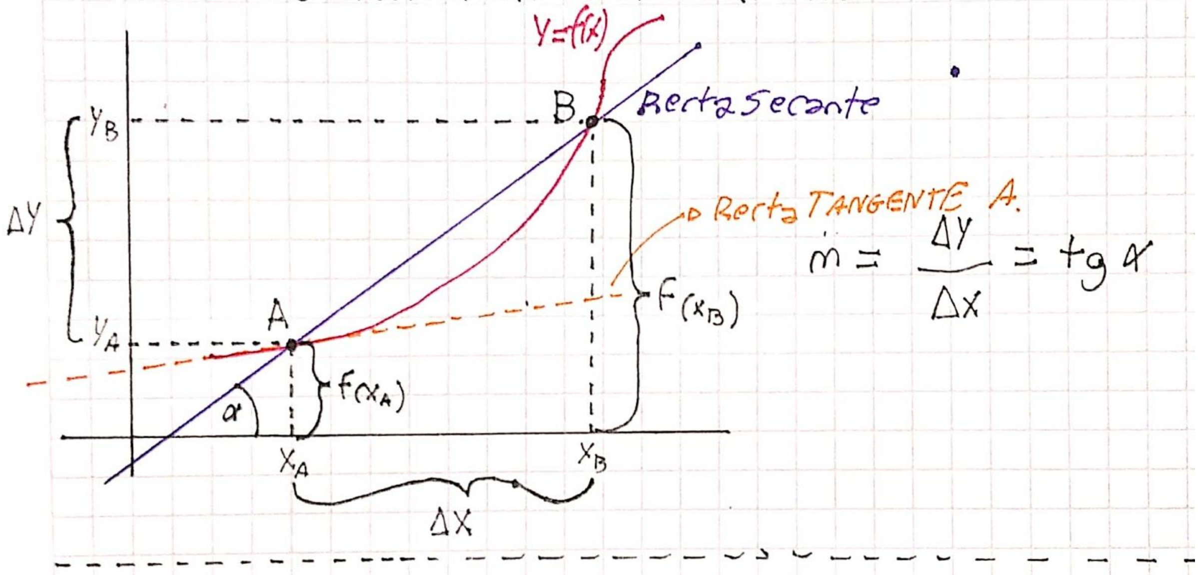
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)}_{\text{Cociente Incremental}}$$

$\nexists f'(a)$ si a es un punto anguloso

$\nexists f'(a)$ si f no es continua en a

Si $\exists f'(a) \rightarrow$ f es continua en a

Velocidad de crecimiento en un Intervalo:



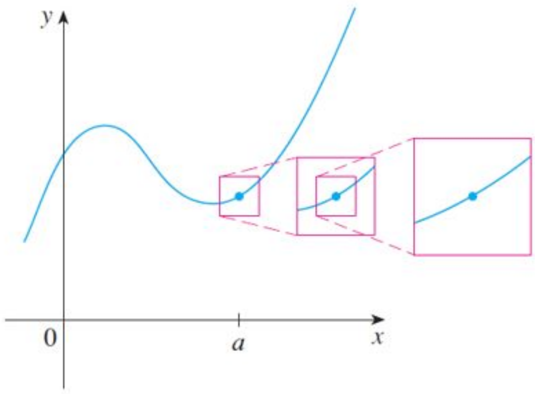


FIGURA 8
f es derivable en $x = a$.

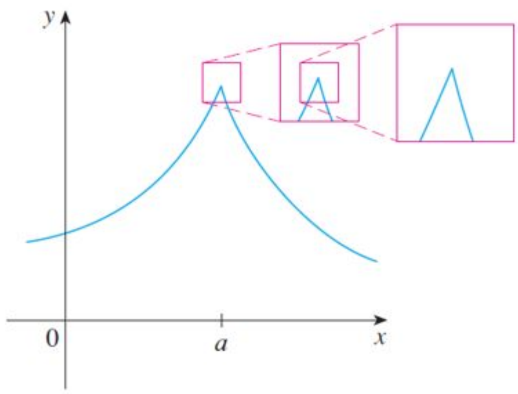
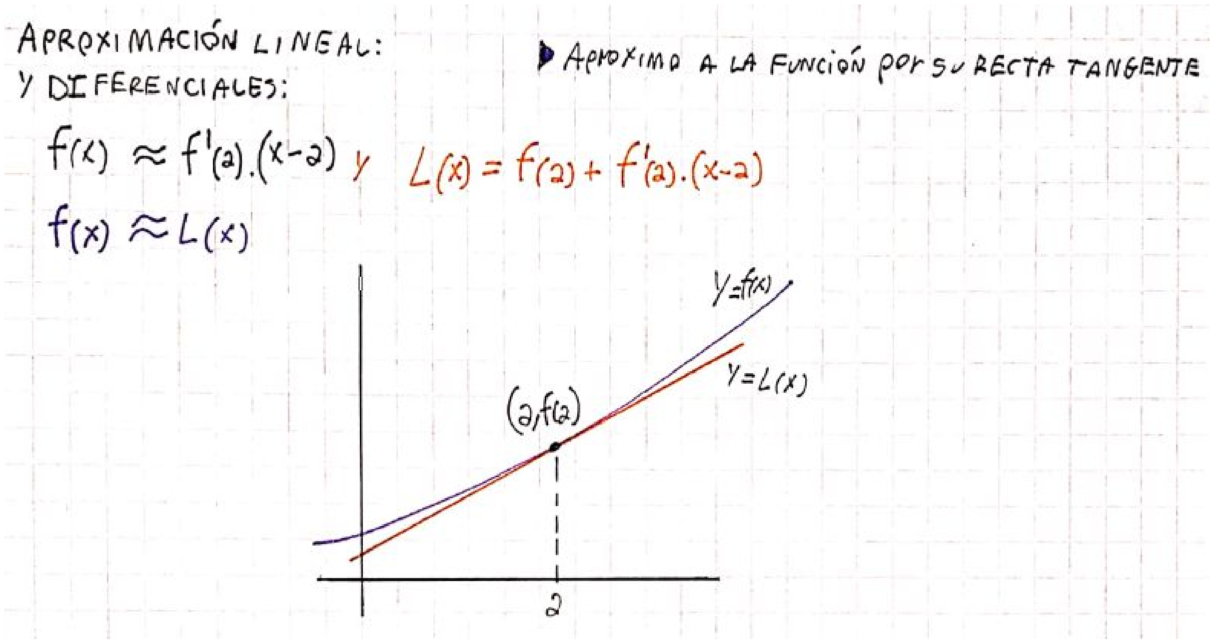


FIGURA 9
f no es derivable en $x = a$.

Aproximaciones lineales

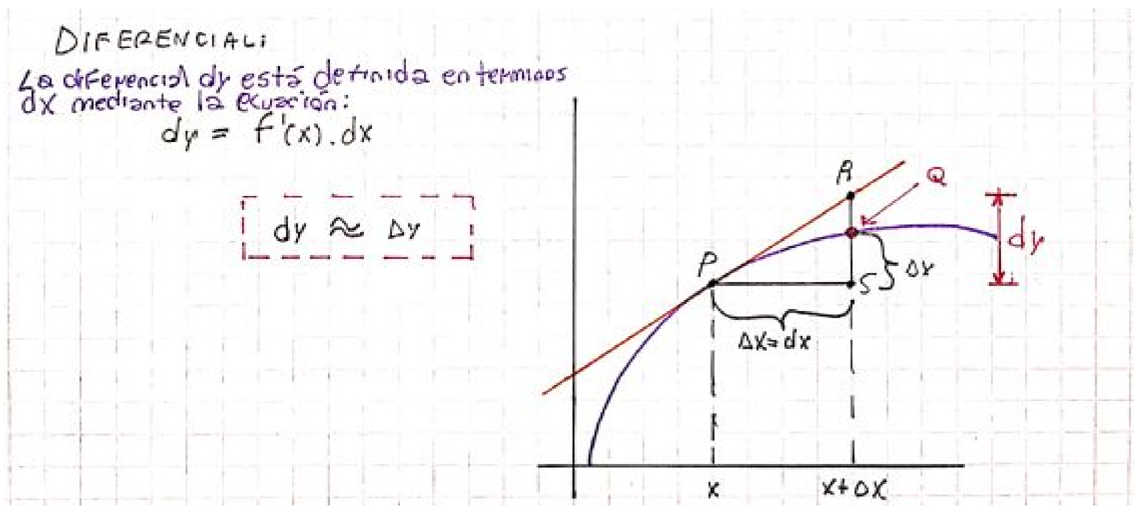


Diferenciales

$$dy = f'(x)dx$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.



Polinomio de taylor

El polinomio de taylor es una aproximación de **n-ésimo grado**

En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o con una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente hallar mejores aproximaciones con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$ para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

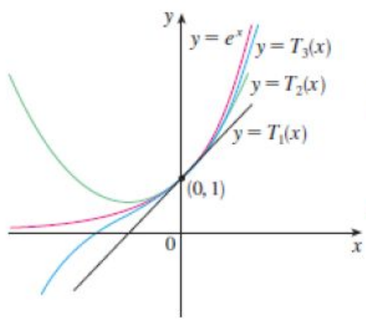
$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrado en $x = a$.**

Ejemplo: Si $f(x) = e^x$, entonces $T_1(x) = 1 + x$ $\quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ $\quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

Intuitivamente, se tiene que si n es mayor entonces el polinomio $T_n(x)$ aproxima mejor a f(x), es decir

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$



En general, si hacemos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de manera que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

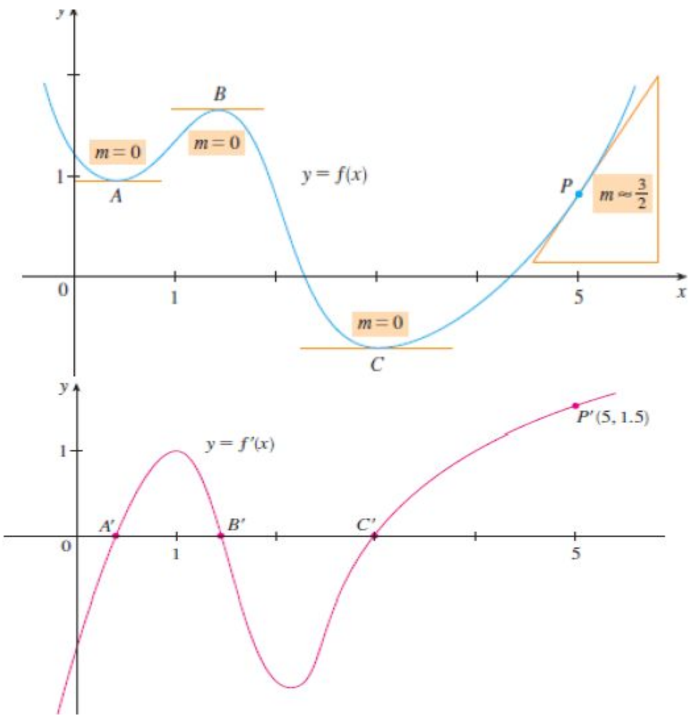
entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor y se puede calcular como

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \qquad \text{Con } z \in (a,x)$$

Estimación de f’(x)

Estimación de f´(a) (temas pendientes para 1er Parcial)

- Dada la gráfica de la función f, podemos estimar el valor de f’(A), estimando el valor de la pendiente de la recta tangente a f en el punto (a, f(a))



Relación con continuidad

4 Teorema Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en $x = a$, debemos demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Lo cual es equivalente a probar que $\lim_{x \to a} (f(x)-f(a))=0$

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$ (Multiplicamos y dividimos por x-a)

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

Pero vimos que NO es derivable en x=0. En efecto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Este último límite no existe, ya que los límites laterales son finitos y distintos

Aplicaciones de la derivada:

Teorema de Rolle

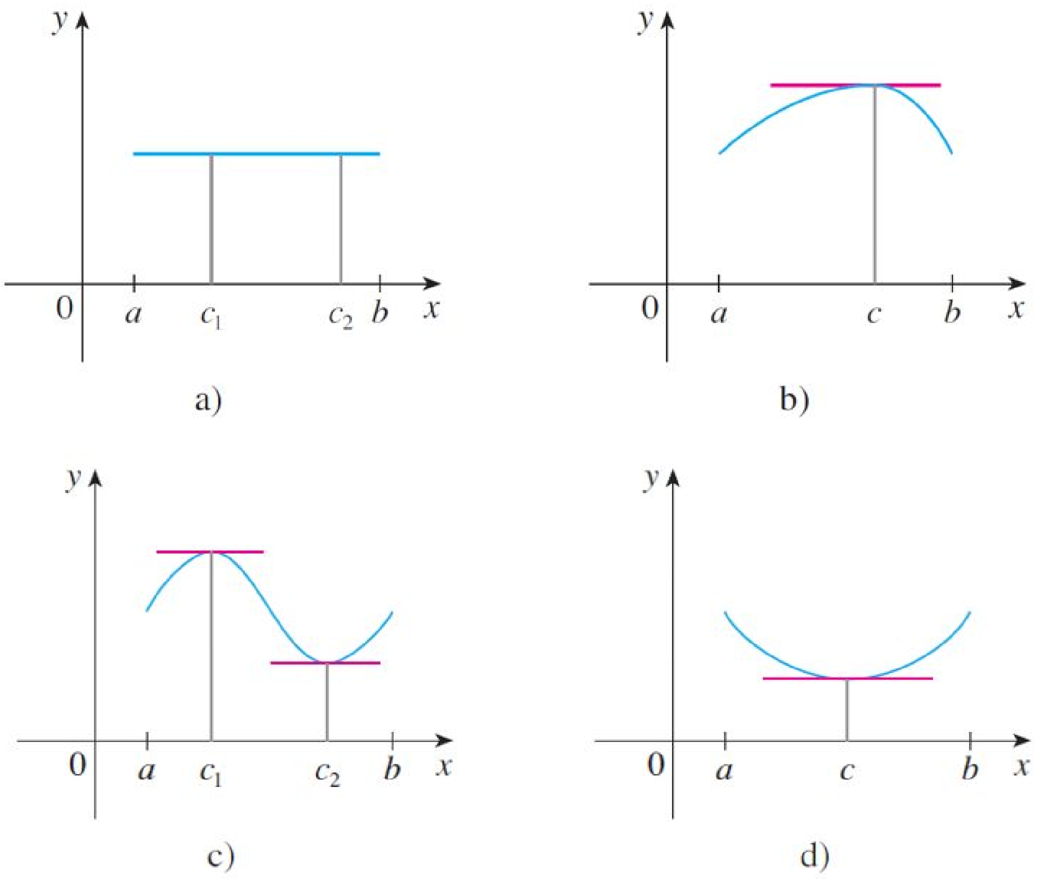
Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

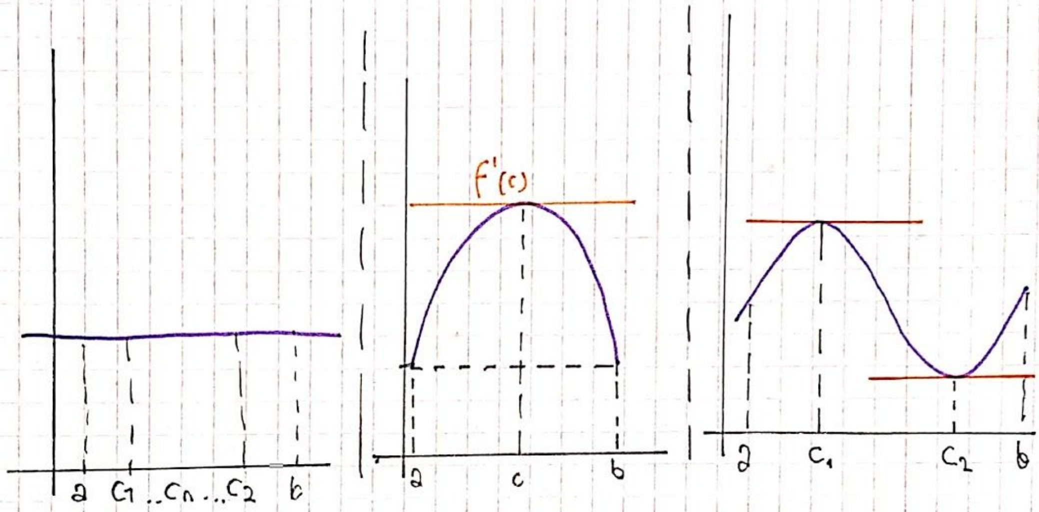


Teorema de Rolle → ASEGURA la existencia de $f'(c) = 0$

Si f es una función que satisface las sig. Hipótesis:

1. f es continua en $[a, b]$ → evaluado con límites laterales
2. f es derivable en (a, b) → no hay puntos angulosos
3. $f(a) = f(b)$ → parto de una altura, llego a una altura igual

→ Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$



PP: Analice si cierta función dada por la gráfica, se le puede aplicar el teorema de Rolle

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{-h} = f'(c) \geq 0\\ \lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{+h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{+h} = f'(c) \leq 0\end{aligned}\right\} \therefore 0 \leq f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$$

T. Valor medio de Lagrange

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

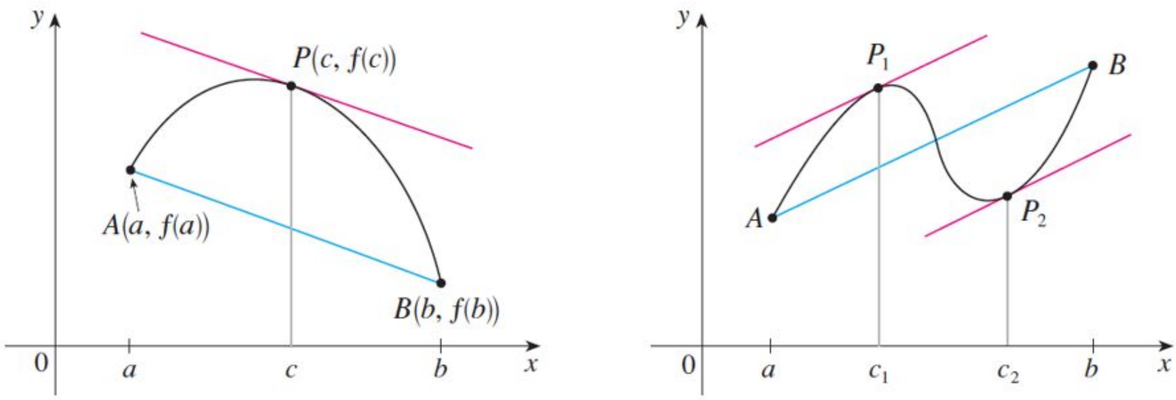
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



TEOREMA DEL VALOR MEDIO (LAGRANGE)

derivabilidad

Si f es una función que satisface las sig. hipótesis:

1. f es continua en $[a, b]$
2. f es derivable en (a, b)

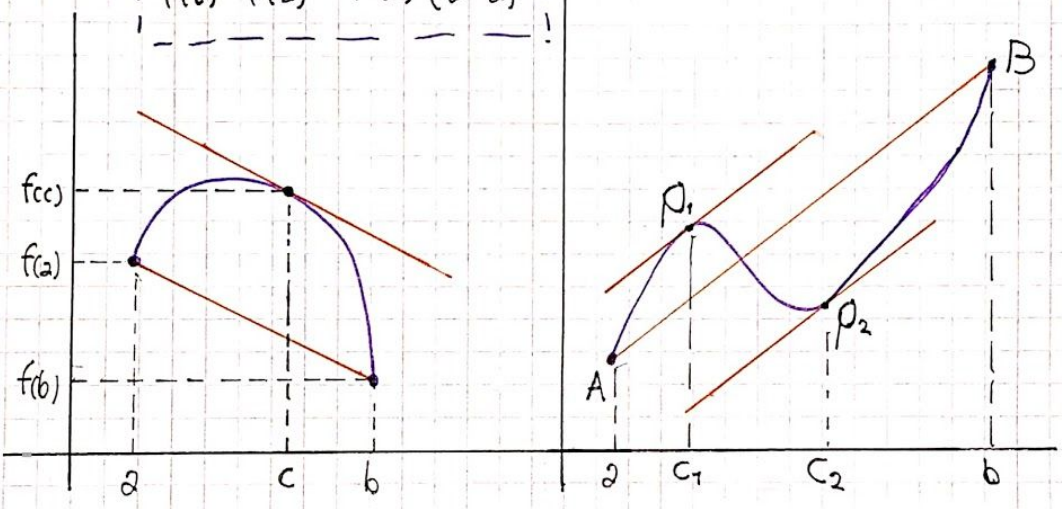
entonces existe un número $X = C$ en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* Relaciona Incremento de y con un incremento en X

ó equivalentemente:

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$



* la pendiente de la recta secante AB es:

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$\boxed{M_{AB} = f'(c)}$$

Pendiente de recta secante   Pendiente

* Siempre existirá si f cumple con las dos hipótesis, un punto en $X \Rightarrow C$ y $f(c)$ que cumpla

$$M_{AB} = f'(c)$$

Osea
Si f es continua en $[a, b]$, y f es derivable en (a, b),
$\exists c$ tal que $f'(c) = M_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

T. Valor medio de Cauchy

- **Es una generalización del teorema del valor medio, se usa para la demostración de la regla de L'Hopital.**
- Si g(x)=x entonces g'(x)=1 y la afirmación del teorema es igual al teorema del valor medio.

$\boxed{1}$ **Teorema del valor medio de Cauchy** Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b). Entonces hay un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regla de L'Hopital

Sí f y g son derivables

Sí $g'(x) \neq 0$ en un Intervalo I que contiene a (excepto posiblemente a)

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm \infty$

(si presenta forma Indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Paso a Paso

① Suponemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L$:

② Planteamos:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{sí } x\neq a \\ 0 & \text{sí } x=a \end{cases} \quad \Big/ \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{sí } x\neq a \\ 0 & \text{sí } x=a \end{cases}$$

Con esto aseguramos la continuidad de **F(x)**. Lo mismo para **G(x)**

F es continua en I porque f es continua en $\{x \in I / x\neq a\}$

y $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$

Lo mismo para G.

3. Usando el teorema de valor medio de Cauchy, $\exists\, y \text{ tal que } a < y < x$ y:

$$\frac{F'(y)}{G'(y)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F(x)}{G(x)}$$

4. Ya que los límites por izquierda y por derecha son L, se puede decir qué

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{y\to a}\frac{F'(y)}{G'(y)}=\lim_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}=L$$

Entonces:

$$\lim_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}=L$$

5. Y si se trata de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, se reemplaza de la siguiente manera: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Productos indeterminados:

Para resolverlos, se realizan artificios para reescribir uno de los productos como cociente.

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

→ PRODUCTOS INDETERMINADOS:

$$f.g \rightarrow \underbrace{f.g = \frac{f}{1/g}}_{\text{Artificio para reescribir el cociente}} = \frac{g}{1/f} \Big\} \text{ con esto, uso L'Hopital}$$

Potencias indeterminadas:

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

- Conviene aplicar logaritmo y utilizar las propiedades de dicha función:

V EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

Crecimiento y decrecimiento

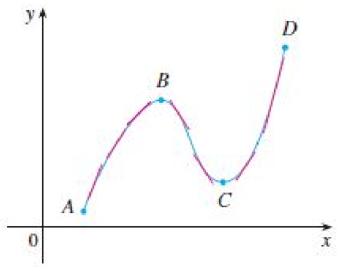


FIGURA 1

Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Prueba creciente/decreciente

a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre ese intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente sobre ese intervalo.

Demostración:

DEMOSTRACIÓN

a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo con $x_1 < x_2$. Según la definición de una función creciente (página 19), tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Sabemos que $f'(x) > 0$ y que f es derivable sobre (x_1, x_2), así que, por el teorema del valor medio, existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora $f'(c) > 0$ por el supuesto de que $x_2 - x_1 > 0$ ya que $x_1 < x_2$. Así, el lado derecho de la ecuación 1 es positivo, por lo que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{o} \quad f(x_1) < f(x_1)$$

lo que demuestra que f es creciente.

El inciso b) se demuestra de manera similar.

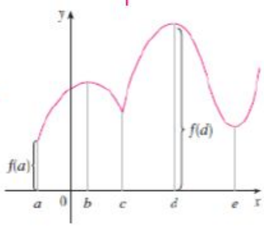
V EJEMPLO 1 Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y dónde es decreciente.

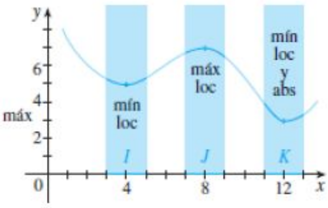
Extremos: Máximos y Mínimos

Definición:

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

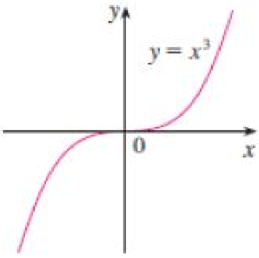




2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x pertenece a $E_r(c)$
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x pertenece a $E_r(c)$

EJEMPLO 3



Existen funciones que no tiene máximo ni mínimo, por ejemplo la función $y=x^3$

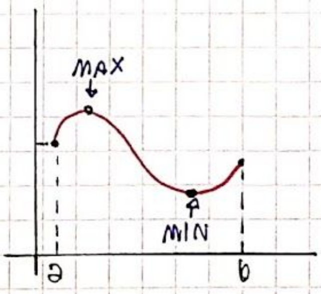
Teorema de Weierstrass

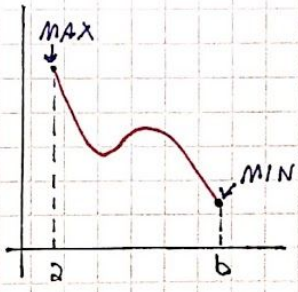
El teorema de Weierstrass afirma la existencia de máximos y mínimos.
Si yo tengo una función continua. Si o Si alcanza un máximo y un mínimo absoluto.

T. de WEIERSTRASS (EXISTENCIA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS)

▶ Si $f(x) \neq cte$ y está definida y es continua en un intervalo $[a; b]$, $F(x)$ alcanzará al menos un MAX. y MIN ABSOLUTOS

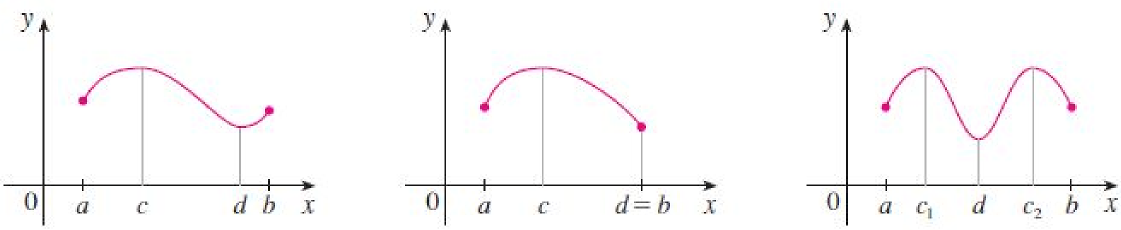
(solo Afirma que existen los MAX y MIN)





3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy aceptable a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por consiguiente, se omite.



En las figuras 8 y 9 se muestra que una función no tiene que poseer valores extremos si no se satisface cualquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

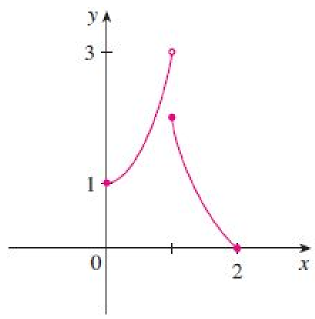


FIGURA 8
Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

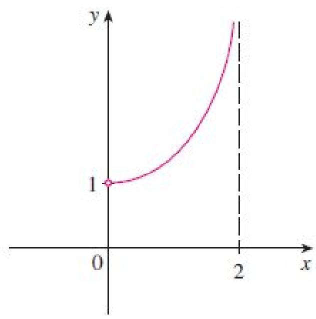


FIGURA 9
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

T. Fermat (Cond. Necesaria NO Suficiente)

4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

Ejemplos de casos donde no vale el teorema:

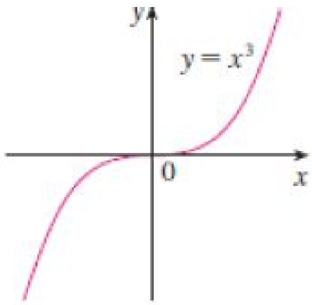


FIGURA 11

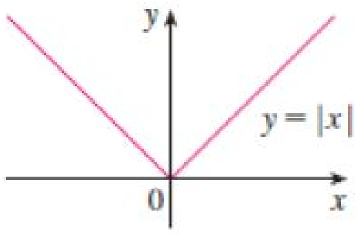


FIGURA 12

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, debe *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números $x = c$, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

Paso a Paso:

1. Suponemos que **f** tiene un máximo local en **x = c**, si tomamos valores lo suficientemente cerca de c, pero no c mismo, obtenemos lo siguiente:

$$f(c+h) - f(c) \leqslant 0$$

2. Si dividimos la desigualdad por **h**, y hacemos límite para cuando **h -> 0**, tenemos la fórmula de la derivada:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

3. Esto demuestra que **f'(c) <= 0**, y analizando de misma manera pero tomando **límite** por izquierda tenemos:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

4. Así demostramos que **f'(c) >= 0 y f'(c) <= 0**, por lo que, por el teorema de compresión:

f'(c) = 0

Demostración

DEMOSTRACIÓN Para la consideración de la conclusión, suponga que f tiene un máximo local en $x = c$. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto implica que, si h está lo suficiente cerca de 0 y es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c+h)$$

y, por consiguiente,

$$\boxed{5} \qquad f(c+h) - f(c) \leqslant 0$$

Podemos dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tenemos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad (utilizando el teorema 2.3.2), obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que $f'(c)$ existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

y con esto se demuestra que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad $\boxed{5}$ se invierte cuando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así que tomando el límite por la izquierda, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya hemos mostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Puntos Críticos:

Definición:

6 Definición Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Condiciones Suficientes

Prueba de la primera derivada

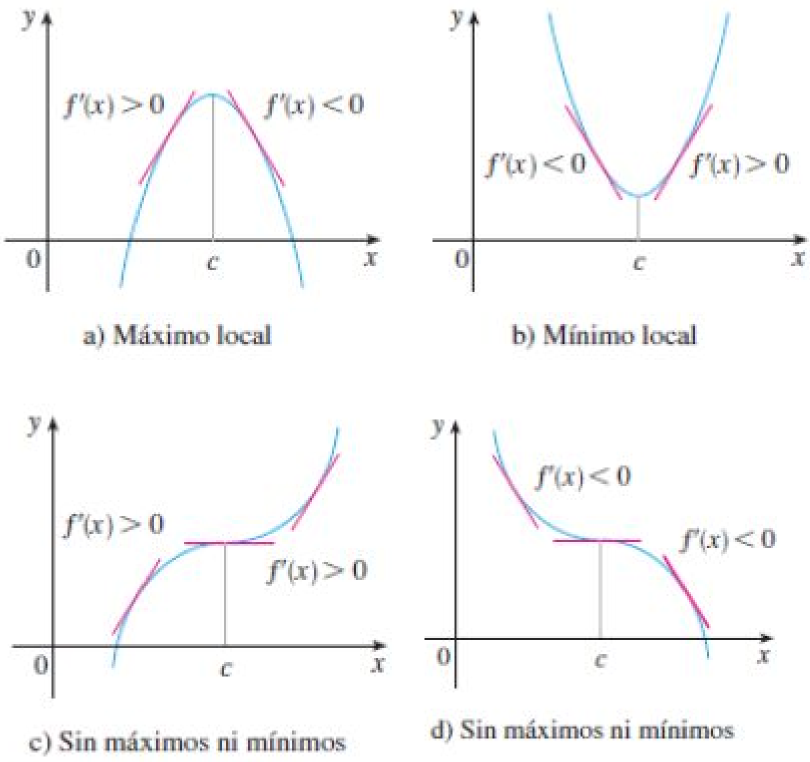
El primero de los métodos para encontrar los máximos y mínimos es la prueba de la primera derivada, que es el utilizado para los casos donde no exista la derivada en un punto c.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.



a) Máximo local

b) Mínimo local

c) Sin máximos ni mínimos

d) Sin máximos ni mínimos

Prueba de la segunda derivada

Es el utilizado con más frecuencia, ya que es común sacar la derivada segunda al analizar funciones. **Esto no sirve cuando la derivada segunda es 0.**

Prueba de la segunda derivada Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

Demostración:

Aplicamos el polinomio de taylor a la a la función hasta que la misma de diferente a cero. Cuando lleguemos a un valor de la derivada analizaremos su exponente.

- Si es par y f^n(x)>0 tendremos un mínimo local
- Si es par y f^n(x)<0 tendremos un máximo local
- Si es impar tendremos un punto de inflexión

Por la condición necesaria para existencia de extremos locales investigamos el punto c, donde $f'(c) = 0$.

La fórmula, en ese caso, es:

$$f(x) = f(c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + f'''(c)\frac{(x-c)^3}{3!} + \ldots + r_n(x).$$

Si $f''(c) \neq 0$, consideramos como resto al término de segundo grado y escribimos:

$$f(x) - f(c) = f''(z)\frac{(x-c)^2}{2} \qquad (1).$$

Ahora bien, el signo del segundo miembro depende del signo de $f''(z)$, pues $\forall x: \frac{(x-c)^2}{2} > 0$ si $x \neq c$.

Si $f''(c) > 0$, como f'' es continua por existir f''', en un entorno conveniente también es $f''(x) > 0$. En efecto, por una propiedad de las funciones continuas (pág. 174),

Luego, en (1) es $f(x) - f(c) > 0$.

Es decir, f tiene mínimo en x=c.

Análogamente, se prueba que si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es máximo local.

Pero dicho criterio no ofrece conclusiones para el caso en que la derivada segunda se anule en el punto considerado.

En ese caso podemos extender el desarrollo de Taylor con $n = 3$. Como $f'(c) = f''(c) = 0$, obtenemos:

$$f(x) - f(c) = f'''(z)\,\frac{(x-c)^3}{3!}.$$

Veremos qué sucede si $f'''(c) \neq 0$.

Suponiendo que $f'''(c) > 0$, por la propiedad mencionada de las funciones continuas, es $f'''(z) > 0$ en un entorno de c. Pero $(x-c)^3$ cambia de signo según x se encuentre a izquierda o a derecha de c.

Por lo tanto,

$$f(x) - f(c) = f'''(z)\,\frac{(x-c)^3}{3!}$$

es positivo si $x > c$ y negativo si $x < c$. O sea, f(c) no es extremo local.

Algo similar sucede si $f'''(c) < 0$.

Por otra parte, como $f''(c) = 0$ es condición necesaria para existencia de punto de inflexión, y la recta tangente atraviesa a la curva en $(c; f(c))$, este punto es de inflexión (con tangente horizontal).

Idea general.

Si $f'''(c) = 0$, extendemos el desarrollo de Taylor con $n = 4$. Con el mismo razonamiento hecho en la primera parte, si $f^{IV}(c) > 0$, entonces f(c) es mínimo local, y si $f^{IV}(c) < 0$, entonces f(c) es máximo local.

Generalizando las demostraciones anteriores, vemos que si $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \ldots\ldots f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$, entonces habrá extremo local si n es par y habrá inflexión, en un punto donde la recta tangente es horizontal, si n es impar.

O sea, si c es un punto interior al dominio de f y la función f tiene n derivadas finitas continuas en c, que son nulas hasta la orden $(n-1)$ inclusive, y $f^{(n)}(c) \neq 0$, resulta:

si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$, entonces f(c) es mínimo local;

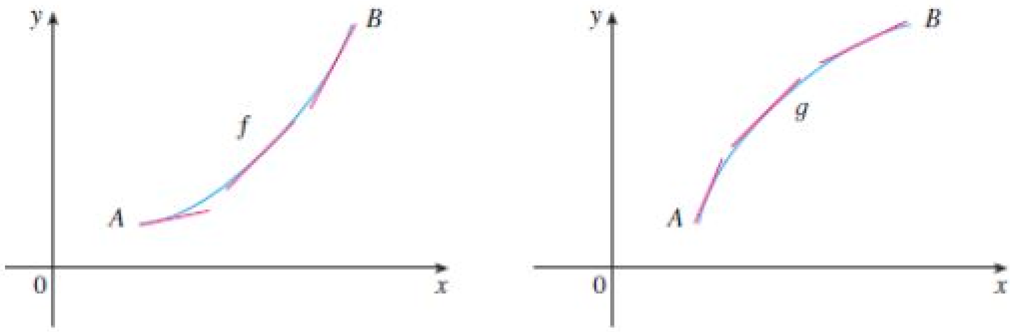
si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, entonces f(c) es máximo local.

Finalmente, si n es impar, entonces $(c; f(c))$ es punto de inflexión.

Concavidad y puntos de inflexión

Concavidad

Definición Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** sobre I. Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes, se dice que es **cóncava hacia abajo** sobre I.



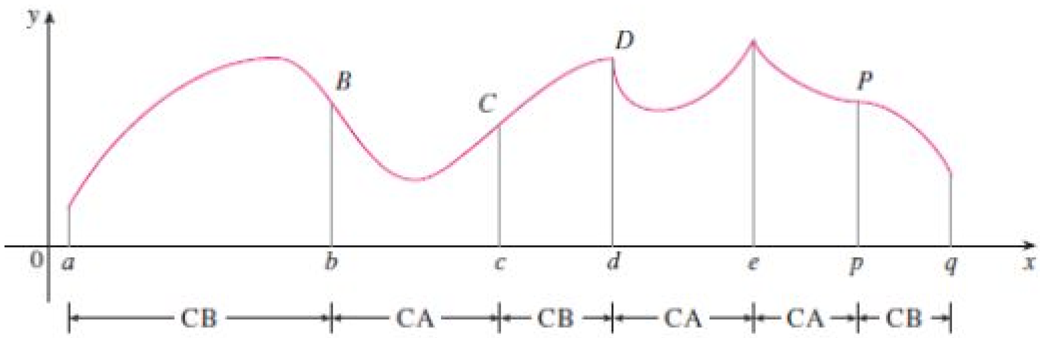
a) Cóncava hacia arriba b) Cóncava hacia abajo

Para obtener la concavidad en un intervalo, se debe realizar la:

Prueba de concavidad

a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.



La figura 7 muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) sobre los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p), y cóncava hacia abajo (CB) sobre los intervalos (a, b), (c, d), y (p, q).

Punto de inflexión

Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama *punto de inflexión* si f es allí continua y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una recta tangente en un punto de inflexión, entonces la curva corta a la recta tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, existe un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

Integral Indefinida / Antiderivada

Definición (antiderivada)

Una función **g:[a,b] -> R** se dice Antiderivada de la función f si **g'(x) = f(x)** Es decir, si la derivada de **g** es igual a **f**.
Ejemplo: La antiderivada de **f(x) = 0** es una función constante
Una función **f(x)** NO tiene una única antiderivada, pero si **g1 y g2**
son antiderivadas de f entonces: **g1 = g2 + C** para alguna constante apropiada **C**.

5 Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualesquier en (a, b), con $x_1 < x_2$. Dado que f es derivable sobre (a, b), debe ser derivable sobre (x_1, x_2) y continua sobre $[x_1, x_2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, obtenemos un número $x = c$ tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{6}$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, tenemos $f'(c) = 0$, así que la ecuación 6 resulta

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante sobre (a, b).

7 Corolario Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante sobre (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

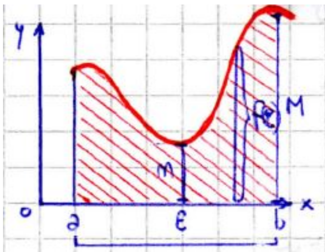
DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, por el teorema 5, f es constante; esto es, $f - g$ es constante.

Teorema del valor medio del cálculo integral

Esto no lo dio específicamente la profe, no va al parcial.



Sea $y = f(x)$ una función continua y acotada en el intervalo cerrado $[a;b]$, su integral definida es igual a la amplitud del intervalo por el valor de la función en un punto intermedio

$$(b-a).m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Por el Teorema del valor intermedio de las funciones continuas, en un intervalo cerrado hay un número comprendido entre el máximo y el mínimo.

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx = f(\varepsilon)$$

$$m \leq f(\varepsilon) \leq M \quad ; \quad a \leq \varepsilon \leq b$$

$f(\varepsilon)$ es el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[a;b]$ y representa la variación media de la integral definida por unidad de variación de la variable x en el intervalo cerrado $[a;b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a).f(\varepsilon)}$$

Existe un rectángulo medio cuya área es igual al área de la figura mixtilínea

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Paso a Paso

1. planteando que g'(x) = f(x) , y tomando un punto genérico x y otro punto h dentro de un intervalo, planteo:

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

donde x y x+h están en (a,b)

2. Divido la igualdad por **h != 0** para obtener la ecuación de la derivada.

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

3. Por el teorema de **weierstrass**, establecemos que van a haber dos números u y v en el intervalo donde f(u) sea un mínimo y f(v) sea un máximo absolutos de f(x) sobre ese intervalo.

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leqslant f(v)h$$

4. Dividiendo la desigualdad por h, y reemplazando lo obtenido en el punto **2**, tenemos:

$$f(u) \leqslant \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

5. cuando h -> 0, u -> x y también v -> x, y por teorema de compresión de los límites podemos definir que:

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Demostración detallada

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por ahora supongamos que $h > 0$. Puesto que f es continua sobre $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre $[x, x + h]$ (Véase la figura 6.)

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tenemos

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

es decir,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Dado que $h > 0$, podemos dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Ahora, utilizamos la ecuación 2 para remplazar la parte de en medio de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

La desigualdad 3 puede demostrarse de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. (Véase el ejercicio 71.)

Ahora sea $h \longrightarrow 0$. Entonces $u \longrightarrow x$ y $v \longrightarrow x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con $\boxed{3}$ y el teorema de la compresión concluimos que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación 4 puede interpretarse como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales) demuestra que g es continua sobre $[a, b]$.

De acuerdo con la notación de Leibniz para derivadas, podemos expresar al TFC1 como

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

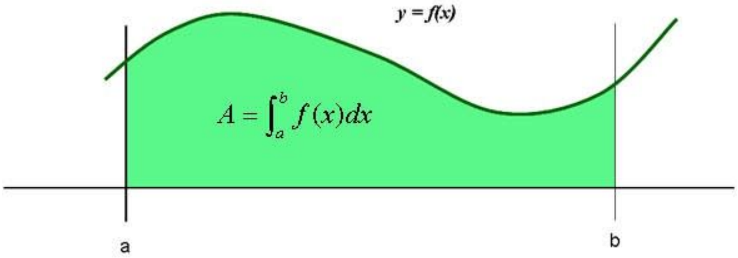
cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, regresamos a la función original f.

Otra explicación

Teorema fundamental del cálculo: Para cualquier función f(x) que sea contínua sobre el intervalo [a,b]:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

en donde z_k es cualquier punto en el intervalo I_k



Ejemplo: Encontrar el área bajo la curva de la siguiente ecuación en los límites dados.

$$S = \int_2^6 (3 + 4x^2)\,dx$$

$$\text{Integrando, tenemos}: S = \left[3x + \frac{4x^3}{3}\right]_2^6$$

Sustituyendo los límites:

$$S = [3(6) + \frac{4(216)}{3}] - [3(2) + 4\frac{(8)}{(3)}]$$

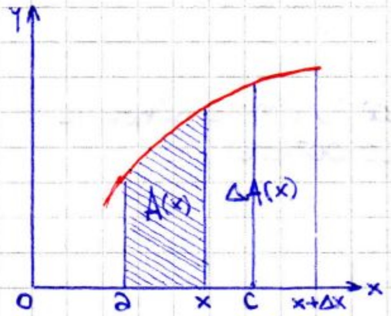
$$S = 18 + 288 - 6 - \frac{32}{3} = \frac{868}{3}$$

$$S = 289.3$$

Otra explicación

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a ; b], la función integral es el área



$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Es derivable, y su derivada en cualquier punto del intervalo [a;b] es f(x) (integrando).

$$\forall x : x \in [a;b] \Longrightarrow A'(x) = f(x)$$

Para demostrar que $A'(x) = f(x)$ utilizamos la definición de derivada:

$$\Delta A'(x) = A(x+\Delta x) - A(x)$$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx - \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \Delta x \cdot f(c) \quad ; \quad x < c < x+\Delta x$$

El cociente incremental resulta:

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x\, f(c)}{\Delta x} = f(c)$$

cuando $\Delta x \to 0$; $c \to x$, y como la función es continua obtenemos:

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

La derivada de una integral definida respecto de su límite superior es igual al integrando. Esto implica que A(x) es primitiva de f(x), lo cual nos permite afirmar que toda función continua en un intervalo cerrado, admite una función primitiva en x.

Regla de Barrow

Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F *es* una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas sobre $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$), vemos que también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hacemos $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtenemos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

Paso a Paso:

Dada $y=f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a;b]$ y una primitiva de ella es $y=F(x)$, y por el Teorema fundamental del cálculo integral, $y=A(x)$ es otra primitiva de $y=f(x)$, por lo tanto ambas primitivas difieren en una constante

$A(x) - F(x) = C$

$A(x) = F(x) + C$

$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$

Permite obtener el área comprendida entre $f(x)$; $x=a$, $x=b$ y el eje de abscisas

Para determinar C hacemos $x=a$

$\int_a^a f(x)\,dx = F(x) + C = 0 \quad \therefore \quad C = -F(x)$

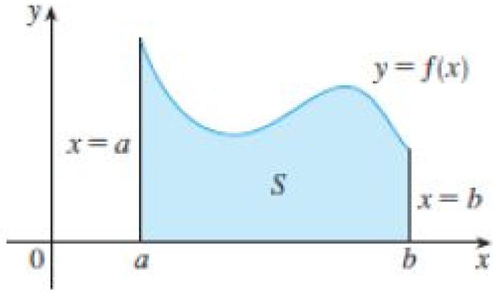
$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C = F(x) - F(a)$

Ahora hacemos $x=b$ y obtenemos la regla de Barrow.

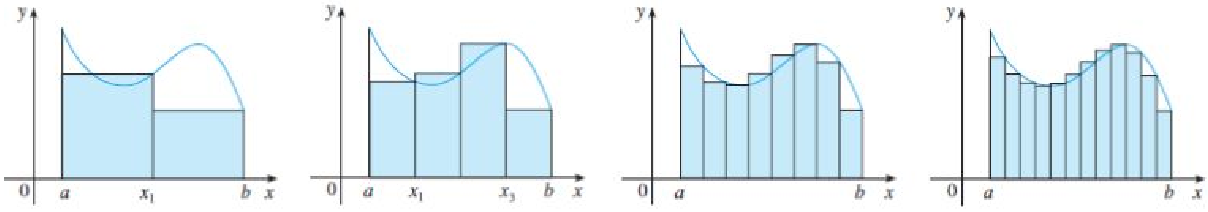
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \text{ÁREA}}$$

Integral Definida

Paso a paso

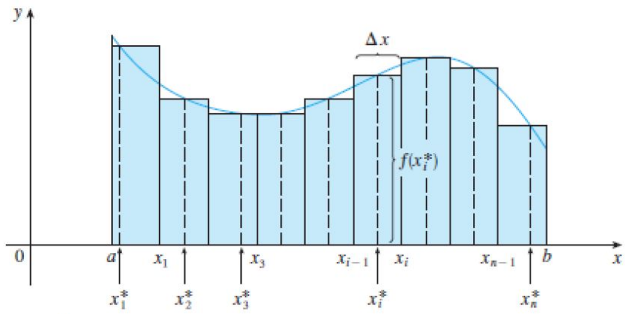


Para calcular el área debajo de una determinada curva, nos aproximamos con rectángulos de base cada vez más pequeños, que, efectivamente son infinitos rectángulos.



a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 8$ d) $n = 12$

El proceso del cálculo del integral es el siguiente:



1. Partimos el intervalo original **[a,b]** en **n** subintervalos.
   $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, b]$
2. La longitud de cada intervalo es de $x_i - x_{i-1} = \Delta x$. Todos tienen la misma longitud.
3. Tomamos como altura de cada rectángulo un punto x_i^*. El área de cada rectángulo es de su base por altura, es decir: $f(x_i^*)\ \Delta x$
4. El área debajo de la curva es: $A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\ \Delta x\ +\ f(x_2^*)\ \Delta x\ +\ \cdots\ +\ f(x_n^*)\ \Delta x]$
5. Si aplicamos un límite, para, efectivamente tomar infinitos rectángulos de base cada vez más pequeña, obtenemos la siguiente formula que es la definición de la integral definida.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_n^*)\ \Delta x = \int_a^b f(x)\ dx$$

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Definición:

2 Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

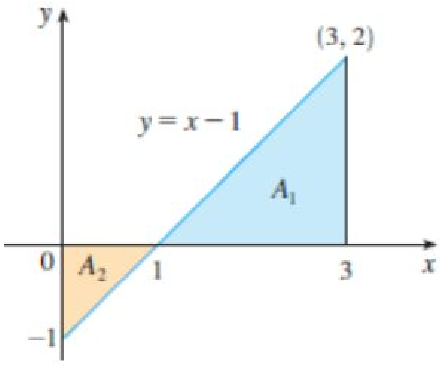
siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todos las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es **integrable** sobre $[a, b]$.

3 Teorema Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ existe.

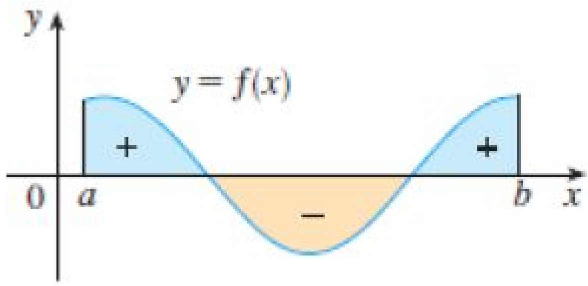
Ejemplo: $\int_0^3 (x - 1)\, dx$

b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se muestra en la figura 10. Calcularemos la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\, dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$



Observación: Si f es positiva entonces la integral entre a y b puede interpretarse como el área debajo de la curva f:



$$\int_a^b f(x)\, dx = A_1 - A_2$$

Propiedades:

Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Note que si invertimos a y b, entonces Δx cambia de $(b-a)/n$ a $(a-b)/n$. En consecuencia,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ de manera que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que lo ayudarán a la evaluación de éstas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es cualquier constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades de comparación de la integral

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.
8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas (esto también se sigue directamente de la definición porque todas las cantidades involucradas son positivas). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande, lo cual se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua podríamos tomar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área bajo la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, la propiedad 7 plantea que

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Si aplicamos la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros, obtenemos

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

La propiedad 8 es útil si lo que quiere se reduce es una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

Métodos de integración:

Integración directa (tabla)

(como la tabla de derivadas, al revés xd)

1 Tabla de integrales indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Por sustitución

El método de sustitución es uno de los más utilizados.

4 Regla de sustitución Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\, dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\, dx = \frac{1}{4}\, du$ y la regla de sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\, du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\, du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

El problema con las integrales definidas:

Cuando se evalúa una integral definida por sustitución, pueden aplicarse dos métodos.
Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental.
Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx &= \int \sqrt{2x + 1}\, dx\Big]_0^4 \\ &= \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} \\ &= \tfrac{1}{3}(27 - 1) = \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

6 Regla de sustitución para integrales definidas Si g' es continua sobre $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por $\boxed{3}$, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que, de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental, tenemos

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica el TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Ejemplo:

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando $\boxed{6}$.

SOLUCIÓN Si usamos la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$. Para encontrar los nuevos límites de integración, notamos que

$$\text{cuando } x = 0,\ u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{cuando } x = 4,\ u = 2(4) + 1 = 9$$

Por tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar $\boxed{6}$ *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluamos la expresión en u en los valores apropiados de u.

Integración por partes

Cada regla de derivación tiene una correspondiente regla de integración. Por ejemplo, a la regla de sustitución para la integración, le corresponde la regla de la cadena para la derivación. La regla de integración que le corresponde a la derivación de un producto, se llama integración por partes.
La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Reacomodando, tenemos la **fórmula para la integración por partes**:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 1 Supongamos que elegimos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos elegir *cualquier* antiderivada de g'.) Así, utilizando la fórmula 1, tenemos

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Integrales de funciones trigonométricas

1. Caso $\int sen^n x\, dx$ / $\int cos^n x\, dx$

$\int sen^n x \; dx$

1. Si n es par, $n = 2K \rightarrow K = \frac{n}{2}$

$sen^n x = (sen\, x)^{2K} = (sen^2 x)^K$

2. Si n es impar, $n = 2K+1$

$sen^n x = (sen\, x)^{2K+1} = (sen^2 x)^K \cdot sen\, x$

Identidades a usar:

$sen^2 x = \frac{1 - cos\,(2x)}{2}$

$cos^2 x = \frac{1 + cos\,(2x)}{2}$

$cos^2 x + sen^2 x = 1$

$cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$sen^2 x = 1 - cos^2 x$

- Si la potencia es par, se debe agrupar de la siguiente manera:
  $\int (sen^2 x)^{n/2}\, dx$
  Luego, reemplazamos por la propiedad trigonométrica acorde y queda algo parecido a :
  $$\tfrac{1}{2}\int [1 + cos(2x)]^{n/2}\, dx = \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int cos(2x)^{n/2}\, dx$$

  Nota: Verificar los signos!!!

- Si la potencia es impar, se debe agrupar en $\int (sen^2 x)^a\, dx$ siendo a = n-1.
  Luego, quedaria algo asi: $\int (sen^2 x)^a\, sen\, x\, dx$
  Si reemplazamos $sen^2 x$ con la primera identidad trigonométrica queda:
  $$\int (1 - cos^2 x)^a\, sen\, x\, dx$$
  Y ahora resta hacer una simple sustitución y listo. ya que senx es la derivada de cosx.

2. Caso $\int sen^m x \, cos^n x \, dx$

Es muy similar al anterior:

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), extraemos un factor coseno y utilizamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx$$

Después sustituimos $u = \operatorname{sen} x$.

b) Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor seno y usamos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \, \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \, \operatorname{sen} x \, dx$$

Después sustituimos $u = \cos x$. [Observe que si la potencia de ambos, seno y coseno, es impar, puede utilizarse a) o b).]

c) Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilizamos las identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil utilizar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

3. Caso $\int tg^m x\, sec^n x\, dx$

Es muy similar al anterior:

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), extraemos un factor $\sec^2 x$ y utilizamos $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan x$:

$$\int \tan^m x \sec^{2k} x\, dx = \int \tan^m x\, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^m x\, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

Después sustituimos $u = \tan x$.

b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor $\sec x \tan x$ y utilizamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec x$:

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x\, dx = \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x\, \sec x\, \tan x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x\, \sec x\, \tan x\, dx$$

Después sustituimos $u = \sec x$.

Otras identidades a usar

2 Para evaluar las integrales a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ o c) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, utilizamos la identidad correspondiente:

$$\text{a)}\quad \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\text{b)}\quad \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\text{c)}\quad \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

1

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Podríamos verificar la fórmula 1 derivando el lado derecho, o como sigue. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

Si sustituimos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$, por lo que la integral resulta $\int (1/u)\, du = \ln|u| + C$. Así, tenemos el resultado buscado

Descomposición por fracciones

Se debe tener en cuenta 3 cosas:

1. El grado del polinomio del numerador
2. El grado del polinomio del denominador
3. Si existen raíces reales o complejas (no existen raices)

En esta sección mostraremos cómo integrar cualquier función racional (una razón de polinomios) al expresarla como una suma de fracciones simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabemos cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que al tomar el denominador común de las fracciones $2/(x-1)$ y $1/(x+2)$, obtenemos

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Ahora, si invertimos el procedimiento, vemos cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$

A tener en cuenta:
Si el polinomio de mayor grado se encuentra en el numerador, primero hay que descomponerlo en fracciones simples.

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, consideremos la función racional

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Es posible expresar f como una suma de fracciones simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. A una función racional de este estilo se le llama *propia*. Recuerde que si

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

donde $a_n \neq 0$, entonces el grado de P es n y lo expresamos como $\text{gr}(P)=n$.

Si f es *impropia*, esto es, $\text{gr}(P)\geqslant \text{gr}(Q)$, entonces debemos tomar el paso preliminar de dividir P entre Q (por división larga) hasta obtener el residuo $R(x)$ de manera que $\text{gr}(R)<\text{gr}(Q)$. El enunciado de la división es

$$\boxed{1} \qquad f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

V EJEMPLO 1 Encuentre $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

SOLUCIÓN Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero ejecutamos la división larga. Esto nos permite escribir

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

Caso 1: Producto de factores lineales distintos

Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

donde no hay factores repetidos (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no necesitamos dividir, así que pasamos a factorizar el denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Puesto que el denominador tiene tres factores lineales diferentes, la descomposición en fracciones parciales del integrando $\boxed{2}$ tiene la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinar los valores de A, B y C, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por el común denominador, $x(2x - 1)(x + 2)$ para obtener

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Otra forma de obtener las constantes A, B y C es reemplazar x por las raíces en la ecuación 4

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación 4 y escribirlo en la forma polinomial estándar, obtenemos

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Las formas polinomiales de la ecuación 5 son idénticas, así que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 del lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 del lado izquierdo, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto plantea el siguiente sistema de ecuaciones para A, B y C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$, así que

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

En la integración del término de en medio hicimos mentalmente la sustitución $u = 2x - 1$, lo cual da $du = 2\,dx$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$.

Caso 2: Producto de factores lineales repetidos

Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; esto es, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Entonces, en lugar del término simple $A_1/(a_1x + b_1)$ de la ecuación 2, usaríamos

7
$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Puesto que $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ es un factor y obtenemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

Puesto que el factor lineal $x - 1$ se presenta dos veces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $(x - 1)^2(x + 1)$, obtenemos

8
$$\begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

Observe que aquí el método de darle a x los valores de las raíces no es suficiente para obtener A, B y C ya que tengo sólo dos raíces. En tal caso elijo otro valor arbitrario de x.

Ahora, igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} A \quad + C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, así que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + K = \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x - 1} + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + K \end{aligned}$$

Caso 3: Factores Cuadráticos irreducibles distintos

Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$ donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de las fracciones parciales de las ecuaciones 2 y 7, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

9 $$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes que han de determinarse. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ tiene una descomposición por fracciones parciales de la forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

El término dado en $\boxed{9}$ puede integrarse completando el trinomio cuadrado (si es necesario) y utilizando la fórmula

10 $$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

V EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Dado que $x^3 + 4x = x(x^2+4)$ no puede factorizarse más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

Multiplicando por $x(x^2+4)$, tenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2+4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Así $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$, así que

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx$$

Para integrar el segundo término, lo repartimos en dos:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Hacemos la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales, de modo que $du = 2x\,dx$. La segunda integral se evalúa por medio de la fórmula 10 con $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

Caso 4: Factores Cuadráticos irreducibles repetidos

Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces en lugar de una única fracción parcial $\boxed{9}$, la suma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
-x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\
&= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A
\end{aligned}$$

Si igualamos coeficientes, obtenemos el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\right) dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K
\end{aligned}$$

Sustitución Trigonométrica

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería eficaz; pero, tal como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ es más difícil. Si cambiamos la variable de x a θ por la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces la identidad $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ nos permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\left|\cos\theta\right|$$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable anterior) y la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ (la variable anterior es una función de la nueva).

En general, podemos hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar a la inversa la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, suponemos que g tiene una función inversa; es decir, g es uno a uno. En este caso, si se reemplazan u por x, y x por t en la regla de sustitución (ecuación 5.5.4), obtenemos

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Este tipo de sustitución se llama *sustitución inversa*.

Puede hacerse la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ siempre que ésta defina una función uno a uno. Esto puede llevarse a cabo restringiendo θ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

En la siguiente tabla se listan las sustituciones trigonométricas que son eficaces para las expresiones con radicales debido a las identidades trigonométricas especificadas. En cada caso, la restricción sobre θ se impone para asegurar que la función que define la sustitución es uno a uno. (Éstos son los mismos intervalos empleados en la sección 1.6 al definir las funciones inversas.)

Tabla de sustituciones trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

V EJEMPLO 1 Evalúe $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3, \text{sen}\,\theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Entonces $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

(Observe que $\theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Así, la regla de la sustitución inversa da

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\,\text{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta$$

$$= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta$$

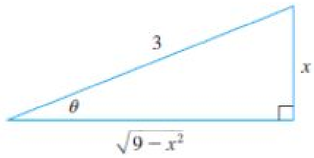
$$= -\cot\theta - \theta + C$$

Del gráfico vemos que $\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión para $\cot\theta$ es válida aun cuando $\theta < 0$.) Dado que $\text{sen}\,\theta = x/3$, tenemos $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$, así que

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Otra forma de hacer el cambio de variable es a través del siguiente triángulo rectángulo, usando trigonometría



$$sen(\theta) = \frac{cat\ op}{hip} = \frac{x}{3}$$

Y

$$\cos(\theta) = \frac{cat\ ady}{hip} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Paso a Paso:

Utilizando la tabla.

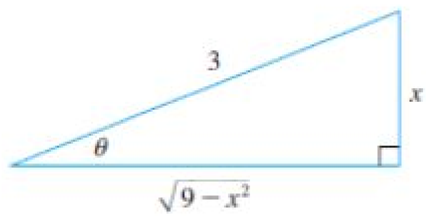
1. Identificamos la integral que no podemos resolver por métodos convencionales.
2. Identificamos que identidad trigonométrica vamos a utilizar.

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

3. Hacemos una **sustitución inversa** donde reemplazamos **x** según la identidad que elegimos por una función **g(t)** que debe ser invertible, por lo que debemos acotar el dominio de esta función, adicionalmente, hay que reemplazar el diferencial **dx** por la derivada de **g(t)**

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Método del triángulo rectángulo



1. Identificamos la integral que no podemos resolver por métodos convencionales.
2. Construyo un triángulo rectángulo donde uno de los lados es la función que buscamos reemplazar, y en los otros lados el valor de **x** y el término constante, en base al signo que tenga **x**
3. Utilizando funciones trigonométricas (**SOH-CAH-TOA**) podemos sacar una función **g(**α**)** para sacar **x** de nuestra función, y manteniendo la igualdad al sustituir.
4. Buscamos reemplazar toda la integral por estas sustituciones para que la única variable sea el **ángulo** α de nuestra sustitución. Al diferencial de x **dx** lo reemplazamos por la derivada de la función **g(**α**)**.
5. Resolvemos el integral y volvemos a nuestra variable original, reemplazando las distintas funciones trigonométricas de la variable α por sus valores según el triángulo, en donde probablemente tengamos algunas funciones trigonométricas inversas como resultado.

$$sen(\theta) = \frac{cat\ op}{hip} = \frac{x}{3}$$

Y

$$\cos(\theta) = \frac{cat\ ady}{hip} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Integrales Impropias

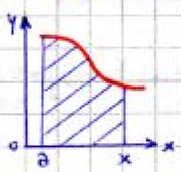
Si se puede calcular la integral o no, depende de la regla exacta de la función. Esta sería una integral impropia de la cual podemos obtener dos resultados dependiendo f(x).

1. **Área infinita**: cuando la integral diverge, es decir, **f(x)** no tiende a 0 lo suficientemente rápido como para calcular el área exacta.
2. **Área Finita:** cuando la integral converge, es decir, **f(x)** tiende a 0 lo suficientemente rápido, y al evaluar el **límite**, el área de esta integral da un número finito.

Al establecer la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ tratamos con una función f definida sobre un intervalo finito $[a, b]$ y supusimos que f no tiene una discontinuidad infinita (véase la sección 5.2). En esta sección extendemos el concepto de integral definida al caso donde el intervalo es infinito y también para el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En cada caso la integral se llama *impropia*. Una de las más importantes aplicaciones de esta idea se da en la distribución de probabilidad, que será estudiada en la sección 8.5.

Tipo 1: Intervalos infinitos

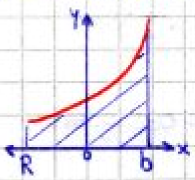
Ⓐ Limite superior no acotado



Intervalo de integración: $[a ; x)$; $x \to \infty$; a = finito

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \Big[F(x)\Big]_a^x = \lim_{x\to\infty} \Big[F(x) - F(a)\Big]$$

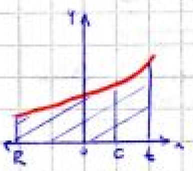
Ⓑ Limite inferior no acotado



Intervalo de integración: $(R ; b]$; $R \to -\infty$; b = finito

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \Big[F(x)\Big]_R^b = \lim_{R\to-\infty} \Big[F(b) - F(R)\Big]$$

Ⓒ Ambos Limites no acotados



Intervalo de integración $(R ; t)$; $R \to -\infty$; $t \to \infty$

se elige un valor "c", tal que $c \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \Big[F(x)\Big]_R^c + \lim_{t\to\infty} \Big[F(x)\Big]_c^t$$

$$\lim_{R\to-\infty} \Big[F(c) - F(R)\Big] + \lim_{t\to\infty} \Big[F(t) - F(c)\Big]$$

Considere la región infinita S que está bajo la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$. Podría pensarse que, puesto que S se extiende al infinito, su área debe ser infinita, pero veamos esto con más detalle. El área de la parte de S que está a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que $A(t) < 1$ sin importar qué tan grande se elija t.

También observamos que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2), así que decimos que el área de la región infinita S es igual a 1 y escribimos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

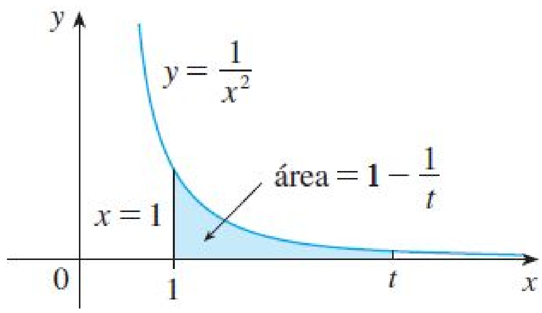


FIGURA 1

1 Definición de una integral impropia de tipo 1

a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que el límite exista (como un número finito).

b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe, y **divergente** si el límite no existe.

c) Si ambas $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso c) puede utilizarse cualquier número real a (véase el ejercicio 74).

V EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo con el inciso a) de la definición 1, tenemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y, por tanto, la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente.

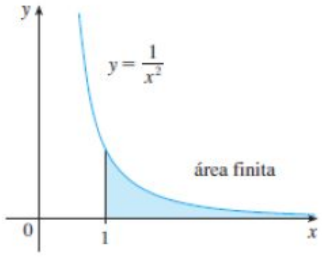


FIGURA 4 $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ converge

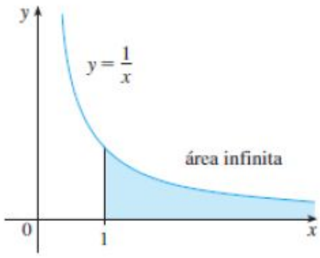


FIGURA 5 $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ diverge

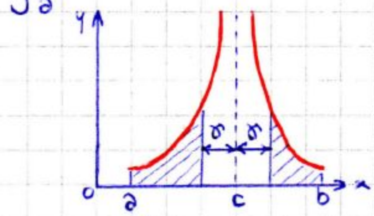
Nota: solo para la f(x) de arriba, integrando de 1 a +inf:

2 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Tipo 2: Integrandos discontinuos o no acotados

Es como el anterior, pero cambian los ejes:

$\int_a^b f(x)\,dx$; a y b son finitos pero f(x) presenta una discontinuidad en C ; $f(c) \to \infty$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{\delta \to 0} \left[F(c-\delta) - F(a)\right] + \lim_{\delta \to 0} \left[F(b) - F(c+\delta)\right]$$

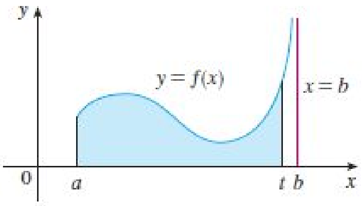


FIGURA 7

Tipo 2: integrandos discontinuos

Suponga que f es una función continua positiva definida sobre un intervalo finito $[a, b)$, pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y por encima del eje x entre a y b. (Para integrales del tipo 1, las regiones se extienden indefinidamente en una dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte de S entre a y t (la región sombreada en la figura 7) es

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces decimos que el área de la región S es A y escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

3 Definición de una integral impropia de tipo 2

a) Si f es continua sobre $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

b) Si f es continua sobre $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente, y **divergente** si el límite no existe.

c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y ambas $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

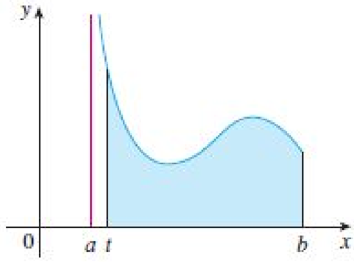


FIGURA 8

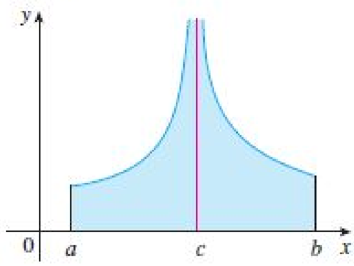
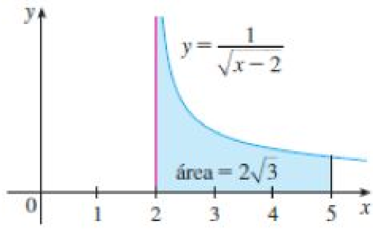


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Encuentre $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero, notamos que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene una asíntota vertical $x = 2$. Dado que hay una discontinuidad infinita en el extremo izquierdo de $[2, 5]$, utilizamos el inciso b) de la definición 3:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$
$$= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big]_t^5$$
$$= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right)$$
$$= 2\sqrt{3}$$



Así, la integral impropia dada es convergente y, puesto que el integrando es positivo, podemos interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la figura 10.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Puesto que aparece a la mitad del intervalo $[0, 3]$, debe utilizarse el inciso c) de la definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde $\displaystyle \int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right)$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

porque $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así, $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No necesitamos evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

ADVERTENCIA Si no hubiéramos notado la asíntota $x = 1$ en el ejemplo 7 y se hubiera confundido la integral con una integral ordinaria, entonces podría caerse en el cálculo erróneo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es incorrecto porque la integral es impropia, y debemos calcularla en términos de límites.

Aplicaciones de integrales

Longitud de arco / rectificación de curva

2 Fórmula de la longitud de arco Si f' es continua sobre $[a, b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

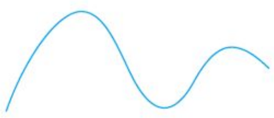


FIGURA 1

TEC Visual 8.1 muestra una animación de la figura 2.

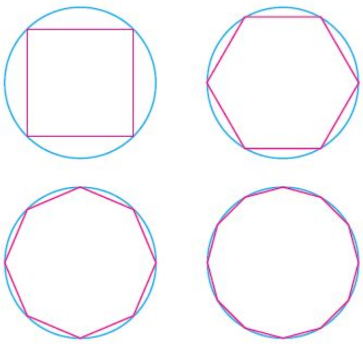


FIGURA 2

¿Qué se entiende por longitud de una curva? Podríamos pensar en ajustar un trozo de cuerda a la curva de la figura 1, y después medir la cuerda con una regla. Pero eso podría ser difícil de hacer con mucha exactitud si se tiene una curva complicada. Necesitamos una definición precisa para la longitud de un arco de una curva, en el mismo sentido que las definiciones desarrolladas para los conceptos de área y volumen.

Si la curva es un polígono, podemos determinar con facilidad su longitud; sólo necesitamos sumar las longitudes de los segmentos de recta que forman el polígono (puede usarse la fórmula de la distancia para hallar ésta entre los puntos extremos de cada segmento). Con esta estrategia, podemos definir la longitud de una curva general aproximándola primero mediante un polígono y luego tomando un límite cuando se incrementa el número de segmentos del polígono. Este proceso es conocido para el caso de un círculo, donde la circunferencia es el límite de longitudes de polígonos inscritos (véase la figura 2).

Ahora supongamos que una curva C se define mediante la función $y = f(x)$, donde f es continua y $a \leq x \leq b$. Podemos obtener una aproximación poligonal a C dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y de igual ancho a Δx. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre C, y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrado en la figura 3, es una aproximación a C.

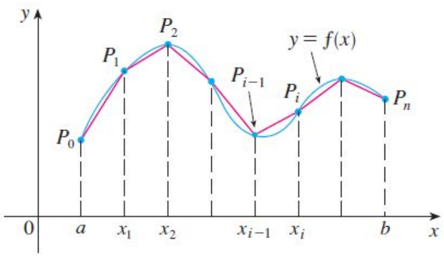


FIGURA 3

La longitud L de C es aproximadamente la longitud de este polígono y la aproximación es mejor cuando se incrementa n. (Véase la figura 4, donde se ha ampliado el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i y se muestran las aproximaciones con valores sucesivamente más pequeños de Δx. Por tanto, definimos la **longitud** L de la curva C con la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, como el límite de las longitudes de estos polígonos inscritos (si el límite existe):

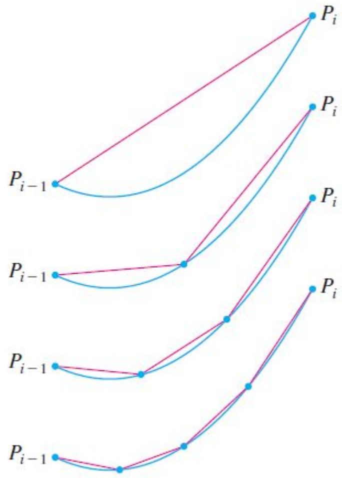


FIGURA 4

$$\boxed{1} \qquad \boxed{L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|}$$

Observe que el procedimiento para definir la longitud de arco es muy similar al utilizado para definir área y volumen: se divide la curva en un gran número de partes pequeñas. Luego, se determinan las longitudes aproximadas de éstas y se suman. Por último, se toma el límite cuando $n \to \infty$.

La definición de la longitud de arco expresada en la ecuación 1 no es muy conveniente para propósitos de cálculo, pero puede deducirse una fórmula integral para L en el caso donde f tiene una derivada continua. [Tal función se denomina **suave** porque un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en $f'(x)$.]

Si $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, encontramos que hay un número x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

es decir,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(puesto que } \Delta x > 0\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, por la definición 1,

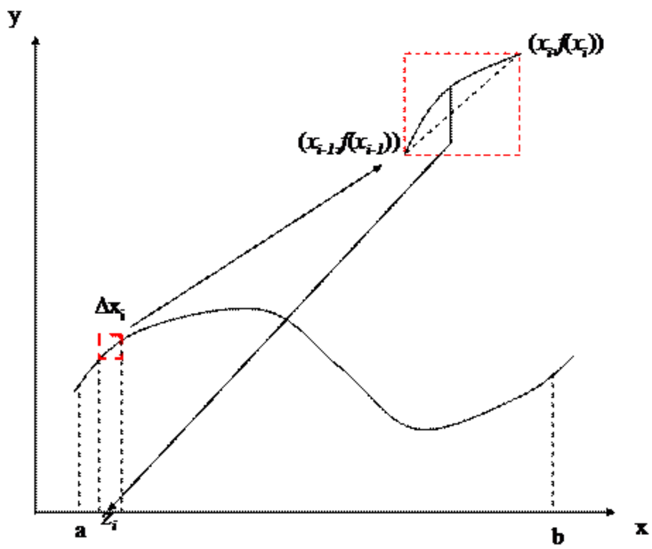
$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Esta expresión se reconoce como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Otra explicación:

El problema general que vamos a plantearnos es el cálculo de la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.



1. Suponemos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

2. Haciendo una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud:
   $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, donde:
   $$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

3. Entre cada par de puntos de la curva, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, aproximamos la longitud de arco $\boldsymbol{s_i}$ por la distancia recta entre ellos. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$s_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Siendo f derivable y continua en [a,b], lo será en este intervalo y:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Para un punto z_i, localizado entre x_{i-1} y x_i.

Sustituyendo en la ecuación de la distancia entre dos puntos:

$$s_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(z_i)(x_i - x_{i-1}))^2} =$$

$$s_i \approx (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(z_i))^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\,\Delta x$$

Sumando los n segmentos rectos tendremos:

$$s_{aprox} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(z_i))^2}\,\Delta x$$

y si n se aproxima a infinito obtenemos la longitud del arco:

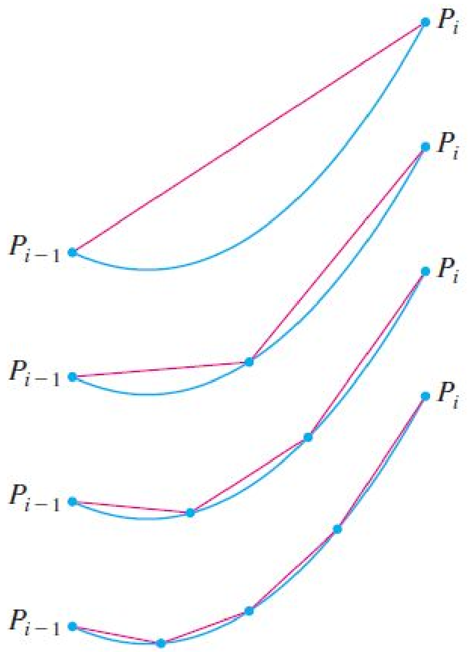
$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(z_i))^2}\,\Delta x$$

que evidentemente es el límite de una suma de Riemann y:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Siempre que el límite exista.

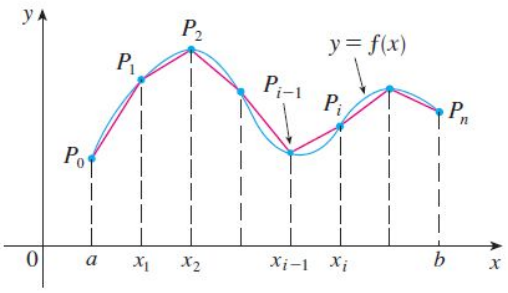
Paso a Paso:



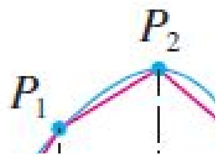
1. Suponemos que *f* es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*).
2. Haciendo una partición del intervalo [*a*, *b*] en *n* subintervalos de igual longitud:

   $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, donde:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



3. Tomando la distancia entre cada uno de estos puntos, P_{i-1} , P_i imaginamos que serían un triángulo, y calculamos la longitud del segmento con la regla de pitágoras.



   El segmento corresponde con la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los dos puntos. y calculamos su longitud con la regla de pitágoras, esta es:

$$\left|P_{i-1}P_i\right| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

   Por el teorema de valor medio, que existe un punto x_i^* entre x_i y x_{i-1} donde la derivada de f(x), multiplicada por Δx_i nos dá Δy_i :

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

4. Sumando la distancia de los segmentos, obtenemos un valor aproximado a la longitud de la curva original reescribiendo la fórmula de longitud de los segmentos utilizando la derivada para reemplazar y_i de la ecuación tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

5. Tomando Límite para, tomar infinitos segmentos cada vez más pequeños, tenemos la ecuación, que, coincide con la de la integral definida.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Área de una superficie de revolución

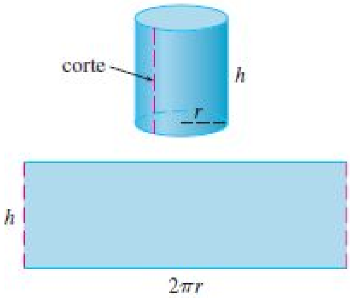


FIGURA 1

Una superficie de revolución se forma cuando se hace girar una curva en torno a una recta. Tal superficie es la frontera lateral de un sólido de revolución del tipo analizado en las secciones 6.2 y 6.3.

Se desea definir el área de una superficie de revolución de tal manera que corresponda con nuestra intuición. Si el área de la superficie es A, podemos imaginar que pintar la superficie requeriría la misma cantidad de pintura que una región plana con área A.

Comencemos con algunas superficies simples. El área superficial lateral de un cilindro circular con radio r y altura h se toma como $A = 2\pi rh$ porque puede imaginarse como si se cortara el cilindro para después desenrollarlo (como en la figura 1) para obtener un rectángulo con dimensiones $2\pi rh$ y h.

De igual manera, podemos tomar un cono circular con base de radio r y de altura inclinada l, cortarlo a lo largo de la línea discontinua en la figura 2, y aplanarlo para formar un

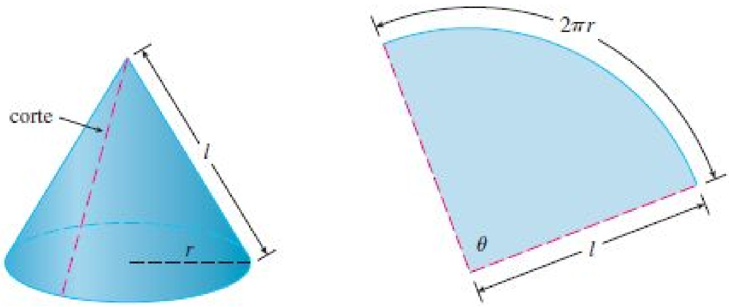


FIGURA 2

sector de un círculo con radio l y ángulo central $\theta = 2\pi r/l$. Sabemos que, en general, el área de un sector de un círculo con radio l y ángulo θ es $\frac{1}{2}l^2\theta$ (véase el ejercicio 35 en la sección 7.3) y, por tanto, en este caso es

$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi r l$$

Por ende, definimos el área de la superficie lateral de un cono como $A = \pi r l$.

¿Qué hay acerca de las superficies de revolución más complicadas? Si se sigue la estrategia que se usó con la longitud de arco, podemos aproximar la curva original mediante un polígono. Cuando éste se hace girar en torno a un eje, crea una superficie más simple cuya área superficial se aproxima al área superficial real. Si se toma un límite, podemos determinar el área superficial exacta.

Entonces, la superficie de aproximación consta de varias *bandas*, cada una formada al hacer girar un segmento de recta en torno a un eje. Para hallar el área superficial, cada una de estas bandas puede ser considerada la porción de un cono circular, como se muestra en la figura 3. El área de la banda (o cono truncado) con una altura inclinada l y radios superior e inferior r_1 y r_2, respectivamente, se encuentra al restar las áreas de los dos conos:

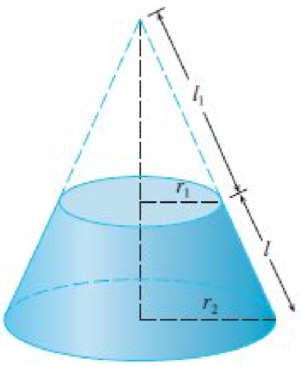


FIGURA 3

1 $$A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Considerando los triángulos semejantes se tiene

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

que da

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{o bien} \qquad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

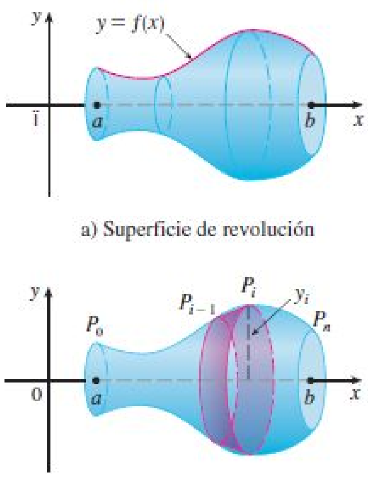
Si se sustituye esto en la ecuación 1, se obtiene

$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

o bien,

2 $$\boxed{A = 2\pi r l}$$

donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ es el radio promedio de la banda.



a) Superficie de revolución

b) Banda de aproximación

FIGURA 4

Ahora aplicaremos esta fórmula a nuestra estrategia. Consideremos la superficie mostrada en la figura 4, que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x, donde f es positiva y tiene una derivada continua. A fin de definir su área superficial, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx, como se hizo para determinar la longitud de arco. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre la curva. La porción de la superficie entre x_{i-1} y x_i se aproxima al tomar el segmento de recta $P_{i-1}P_i$, y hacerlo girar en torno al eje x. El resultado es una banda con altura inclinada $l = |P_{i-1}P_i|$ y radio promedio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ de modo que, por la fórmula 2, su área superficial es

$$2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}|P_{i-1}P_i|$$

Como en la demostración del teorema 8.1.2, tenemos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

donde x_i^* es algún número en $[x_{i-1}, x_i]$. Cuando Δx es pequeño, tenemos $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ y también $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, puesto que f es continua. Por tanto,

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

y de este modo una aproximación a lo que se considera el área de la superficie de revolución completa es

$$\boxed{3} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

Esta aproximación al parecer mejora cuando $n \to \infty$ y, reconociendo a $\boxed{3}$ como una suma de Riemann para la función $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Por tanto, en el caso donde f es positiva y tiene una derivada continua, el **área superficial** de la superficie obtenida se define al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, en torno al eje x como

$$\boxed{4} \qquad \boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

V EJEMPLO 1 La curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x. (La superficie es una porción de una esfera de radio 2. Véase la figura 6.)

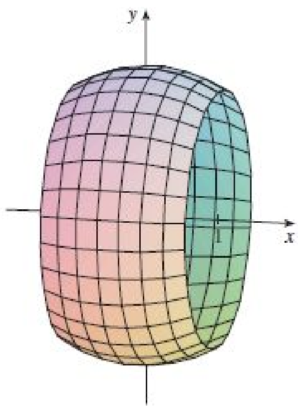


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra la porción de la esfera cuya área superficial se calculó en el ejemplo 1.

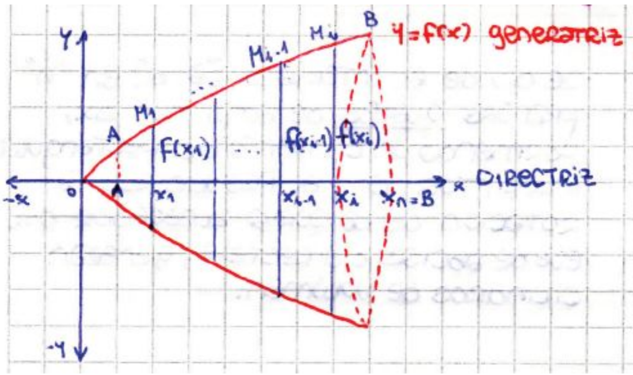
SOLUCIÓN Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

y, por tanto, por la fórmula 5, el área superficial es

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi \end{aligned}$$

Otra explicación:



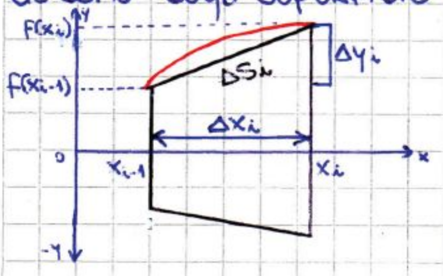
Trazamos las cuerdas:

$AM_1; M_1M_2; \dots; M_{i-1}M_i; \dots; M_{n-1}B$

Las longitudes de estas cuerdas se designan:

$\Delta S_1; \Delta S_2; \dots; \Delta S_i; \dots \Delta S_n$

En la rotación de la curva, cada cuerda de longitud ΔS_i describe un "tronco de cono" cuya superficie lateral es:



$$\Delta A_i = \underbrace{2.\pi.R_m}_{\text{Perímetro del tronco de cono}} . \Delta S_i$$

$$\boxed{R_m = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\boxed{\Delta S_i = (\Delta x_i).\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}}$$

Sustituimos ΔS_i y R_m y obtenemos:

$$\Delta A_i = 2.\pi.\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.(\Delta x_i).\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Por teorema de Lagrange:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\varepsilon_i) \quad ; \quad x_{i-1} < \varepsilon_i < x_i$$

Reemplazando se obtiene:

$$\Delta A_i = \pi.(f(x_i)+f(x_{i-1})).(\Delta x_i).\sqrt{1+[f'(\varepsilon_i)]^2}$$

La superficie descripta por la línea poligonal será:

$$\Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \pi.(f(x_i)+f(x_{i-1})).(\Delta x_i).\sqrt{1+[f'(\varepsilon_i)]^2}$$

El área exacta será:

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi.(f(x_i)+f(x_{i-1})).(\Delta x_i).\sqrt{1+[f'(\varepsilon_i)]^2}$$

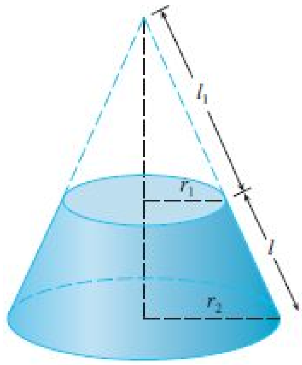
cuando $\Delta x_i \to 0$; $f(x_i)$ y $f(x_{i-1}) \to f(\varepsilon_i) \Longrightarrow f(x_i)+f(x_{i-1}) = 2f(\varepsilon_i)$

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \,.\, 2f(\varepsilon_i) \,.\, (\Delta x_i) \,.\, \sqrt{1+[f'(\varepsilon_i)]^2}$$

Finalmente:

$$\boxed{A = \int_a^b \pi \,.\, 2f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2} \,.\, dx}$$

Paso a Paso:



1. Suponemos que *f* es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*).
2. Haciendo una partición del intervalo [*a*, *b*] en ***n*** subintervalos de igual longitud, armamos subintervalos donde vamos a **definir polígonos** de tipo **cono truncado**. (gráfico)
3. Tomando un triángulo semejante para sacar de la fórmula de área la longitud del cono:

$$(r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

Reescribimos el área del **cono truncado** como:

$$A = \pi(r_1 l + r_2 l) \quad = 2\pi r l$$

4. Considerando que l es la longitud del segmento que obtenemos por rectificar el arco de la función, tenemos que: $l = |P_{i-1}P_i|$ y el radio del cono truncado va a ser la altura de la función en un **punto medio** de este subintervalo, tenemos que:

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \quad \text{y} \quad |P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

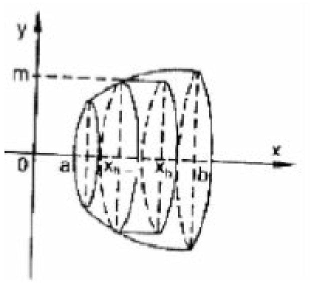
Dado que Δx es muy chico, $y_i = y_{i-1} = f(x_i^*)$ entonces $2f(x_i^*) = y_{i-1} + y_i$ y reescribiendo toda la fórmula tenemos:

$$2\pi f(x_i^*)\sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

5. Sumando las superficies de estos conos, tenemos una superficie aproximada a la de la revolución de f(x), y tomando límite para, tomar infinitos segmentos cada vez más pequeños, tenemos la ecuación, que, coincide con la de la integral definida.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*)\sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Volumen de un sólido de revolución



Procedemos de manera similar a las aplicaciones anteriores

Aproximando el recinto mediante rectángulos, si se hacen girar dichos rectángulos alrededor del eje x se obtienen cilindros de revolución.

Elijamos rectángulos inscriptos y consideremos en particular uno de ellos, aquel que tiene como longitud de la base el valor $(x_h - x_{h-1})$ y como longitud de la altura el mínimo de f en el subintervalo $[x_{h-1}; x_h]$.

El volumen del cilindro engendrado por este rectángulo está dado por la fórmula:

$$V = \pi [m_h]^2 (x_h - x_{h-1}).$$

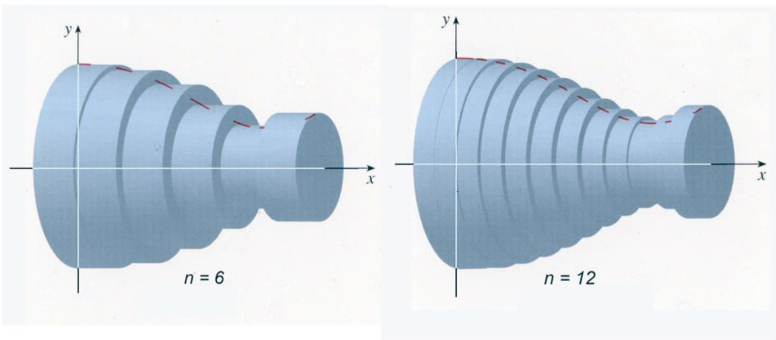
El volumen correspondiente al polígono inscripto considerado está dado por la suma $\sum_{h=1}^{n} \pi [m_h]^2 (x_h - x_{h-1})$.

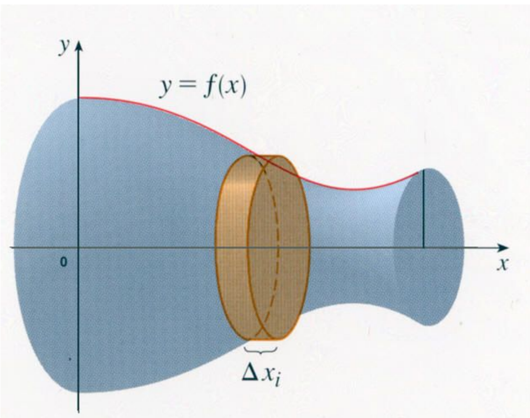
Por definición, el volumen del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Otra explicación:

Si se gira una figura plana comprendida entre $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje X, podemos irnos aproximando a la forma requerida del sólido si generamos discos o cilindros, cada vez más chicos:





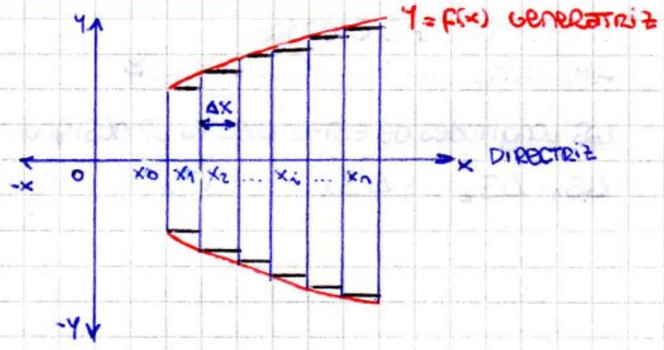
Entonces, cuando tomamos un gran número de discos, podemos considerar un disco infinitesimal y evaluar su volumen (ver la siguiente figura) que será evidentemente, en el límite cuando $Dx_i \rightarrow dx$, $pf(x)^2dx$.

Si integramos en el intervalo $[a, b]$, el volumen del sólido de revolución se obtiene por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

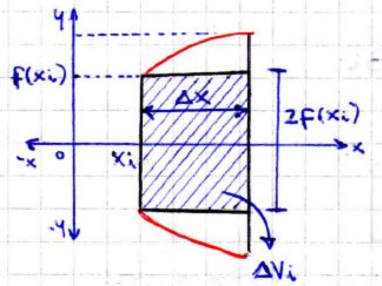
Otra explicación:

Volúmen de un sólido de revolución



Se divide al intervalo [a;b] en n franjas iguales de amplitud Δx, formando un conjunto de rectángulos inscriptos, que al producirse la rotación de la curva alrededor del eje de abcisas o directriz, generan cilindros de volúmen.

La suma de los volúmenes de los cilindros será el volumen aproximado del sólido de rev



$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$\Delta V_i = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta V_i = \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x_i$$

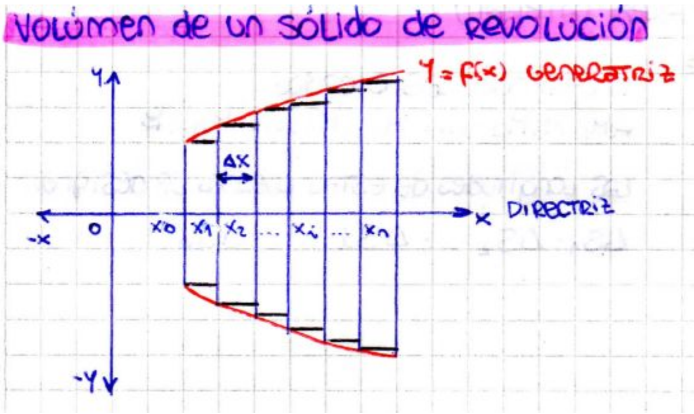
El volumen exácto será:

$$V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$$

Finalmente:

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

Paso a Paso:



1. Suponemos que *f* es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*).
2. Haciendo una partición del intervalo [*a*, *b*] en ***n*** subintervalos de igual longitud, armamos subintervalos donde vamos a **definir sólidos** que serán **cilindros**, (gráfico)
3. El volumen de estos cilindros será:

$$\Delta V_i = \pi . R^2 . \Delta X_i$$

Siendo $\triangle x_i$ el ancho de los segmentos que tomamos anteriormente.
Podemos reemplazar el **RADIO** por la altura de la función en un punto intermedio dentro del segmento, para compensar por más y por menos la diferencia de alturas.

$$\Delta V_i = \pi . (f(x_i))^2 . \Delta X_i$$

4. Al sumar los volúmenes de los cilindros, obtendremos el volumen aproximado del sólido de revolución.

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

5. tomando límite para, tomar infinitos cilindros de ancho cada vez más pequeño, tenemos la ecuación, que, coincide con la de la integral definida.

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\, f(x_i^*)^2 \Delta x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$