Resumen AM2 Teórico

Cátedra: Análisis Matemático 2

Año: 2020

Curso: 1R3

Por: Enrique Walter Philippeaux

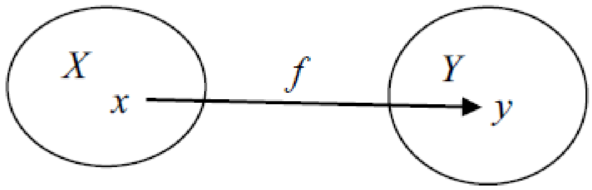
Índice

Funciones de varias variables

Funciones escalares

Funciones escalares de variables escalares.
Sus gráficas son curvas en el plano.

$y = f(x)$ $\quad R \xrightarrow{f} R$



$X \subseteq R$ $\quad Y \subseteq R$

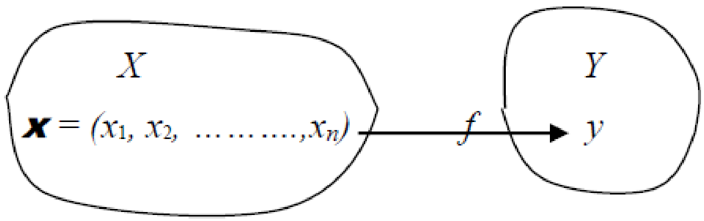
Campos escalares

Funciones escalares de variable vectorial
Si es de R^2 A R^1 su gráfica es una superficie en el espacio

$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

$y = f(\boldsymbol{x})$

$R^n \xrightarrow{f} R$

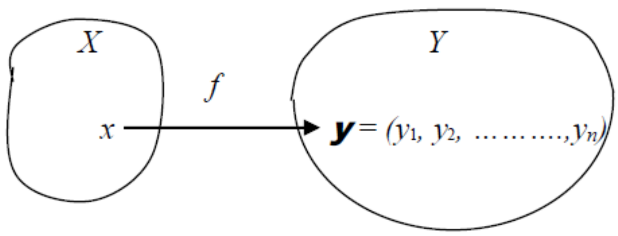


$X \subseteq R^n$ $\quad Y \subseteq R$

Funciones vectoriales

Funciones vectoriales de variable escalar
Describen curvas en el espacio/plano

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

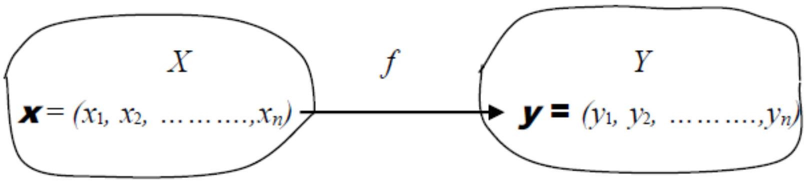


$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$ $\quad R \xrightarrow{F} R^m$ $\quad X \subseteq R$ $\quad Y \subseteq R^m$

Campos vectoriales

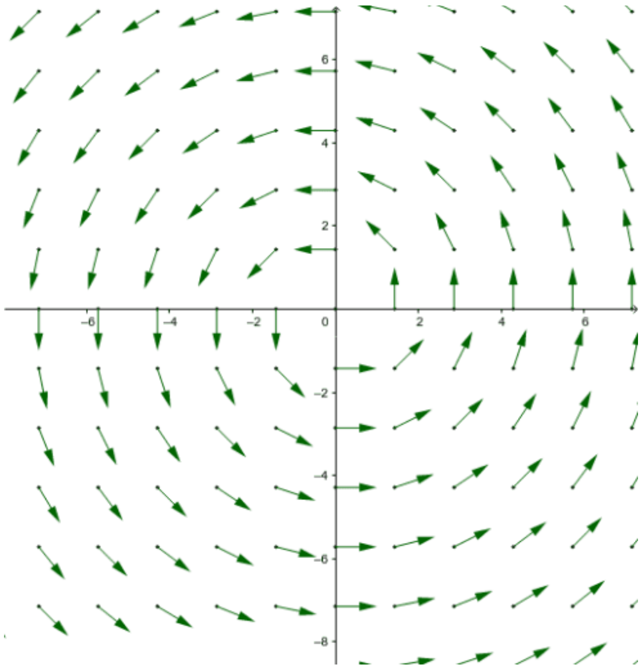
Funciones vectoriales de variables vectoriales
Describen vectores situados en cada punto de un espacio: ej: campo magnético

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \end{cases}$$



$X \subseteq R^n$ $Y \subseteq R^m$

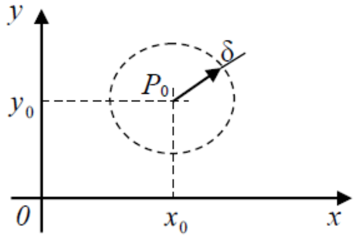
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ $R^n \xrightarrow{F} R^m$



Conjuntos entornos y puntos

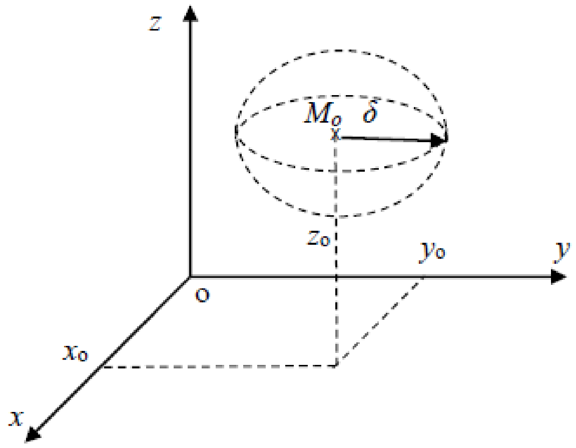
En R^2 el **entorno de un punto** $P_0(x_0, y_0)$ y de radio δ es el conjunto de puntos ubicados en el interior de un círculo de centro P_0 y radio δ.

$$E(P_0, \delta) = \left\{(x, y) / 0 \leq +\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}.$$



De igual manera en R^3 el **entorno de un punto** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y de radio δ es el conjunto de puntos ubicados en el interior de una esfera de centro M_0 y radio δ.

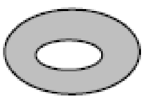
$$E(M_0, \delta) = \left\{ (x, y, z) / 0 \leq +\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta \right\}$$



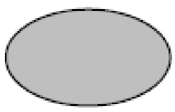
Definiciones

- Un **entorno de un punto es reducido** cuando se excluye su centro.
- El punto perteneciente a un conjunto es un **punto interior** del mismo, si existe un entorno suyo cuyos puntos pertenecen todos a dicho conjunto.
- Un punto no perteneciente a un conjunto es un **punto exterior** si existe un entorno suyo en donde ninguno de sus puntos pertenece a dicho conjunto.
- Un punto perteneciente o no al conjunto es un **punto frontera** si no es interior ni exterior. Es decir que en un entorno suyo hay puntos que pertenecen al conjunto y otros que no pertenecen.
- Un punto P perteneciente o no a un conjunto es un **punto de acumulación** si en todo entorno reducido suyo hay algún punto de dicho conjunto, distintos de P.
- Un punto perteneciente a un conjunto es un **punto aislado** si en un entorno reducido suyo ninguno de sus puntos pertenecen a dicho conjunto.
- La **frontera** de un conjunto está formada por la totalidad de los puntos frontera de dicho conjunto.
- El **conjunto abierto** es el que está formado sólo por los puntos interiores.
- El **conjunto cerrado** es el que contiene también a la frontera.
- Un conjunto es **conexo** si dos de sus puntos pueden ser unidos por alguna poligonal íntegramente contenida en el conjunto.
- Un conjunto es **simplemente conexo** cuando cualquier poligonal cerrada trazada en él, puede reducirse a un punto, por deformación continua sin salirse del conjunto.

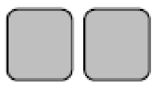
Conjunto conexo



Conjunto simplemente conexo



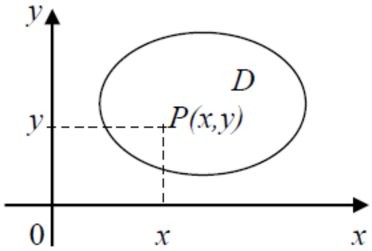
Conjunto no conexo



Dominio

Definimos como Dominio de existencia de una función, al conjunto de pares de valores de (x, y) para los que está definida la función $z = f(x, y)$.

A cada par de valores de "x e y" le corresponde un punto en el plano $0xy$, el conjunto de estos puntos se denomina Dominio de la función.



$z = f(x, y)$ o $z = f(P)$

El Dominio es un subconjunto del producto cartesiano RxR, es decir $D_f \subseteq R^2$.

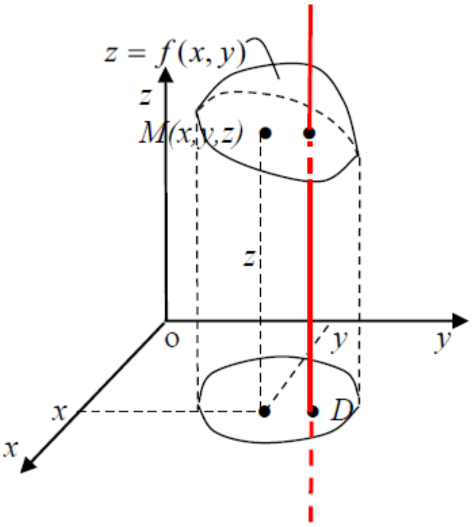
Definiciones

- **Frontera** de un Dominio es la línea que limita al mismo. Y los puntos del Dominio que no pertenecen a la Frontera se denominan **puntos interiores** del Dominio.
- **Dominio abierto** es el que está formado solo por puntos interiores.
- **Dominio cerrado** es el que incluye también los puntos de la frontera.
- Un dominio es **acotado** si existe una magnitud constante C tal que |OP| < C . Siendo OP la distancia entre el origen de coordenadas y todo punto P del dominio.

Imagen

Imagen o Rango de la función $z = f(x, y)$ es el conjunto de valores que toma "z" para todos los puntos que conforman el dominio. Es un subconjunto de los números reales, es decir $I_f \subseteq R$.

Superficie en el espacio



Si por cada punto (x, y) del dominio D trazamos una perpendicular al plano $0xy$, y tomamos un segmento de longitud igual a $f(x, y)$ obtendremos en el espacio un punto $M(x, y, z)$.

El lugar geométrico de todos los puntos M que satisfacen a La función $z = f(x, y)$ se llama gráfica de dicha función.

Una función de dos variables independientes nos define una <u>SUPERFICIE EN EL ESPACIO</u>.

La proyección de dicha superficie sobre el plano $0xy$ es el dominio de la función.

Cada recta perpendicular al plano $0xy$ que pasa por un punto del dominio corta a la superficie $z = f(x, y)$ en un solo punto.

Líneas de nivel

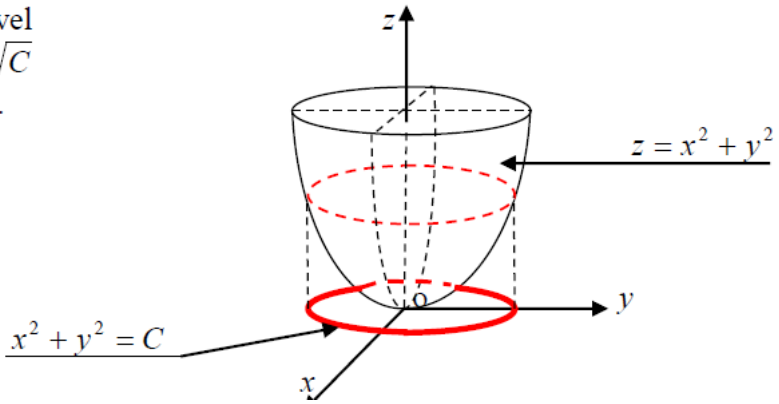
Líneas o Curvas de Nivel de una superficie $z = f(x, y)$, *es el conjunto de todos los puntos* (x, y) *en los que la función toma el mismo valor.*

Es decir que es la proyección, sobre el plano *0xy*, de la intersección entre la superficie y un plano paralelo al *0xy*.

Ejemplo:

Dada la función $z = x^2 + y^2$. Las Líneas de Nivel de esta superficie están representadas por la ecuación: $\boxed{x^2 + y^2 = C}$, siendo C una constante.

En este ejemplo, las Líneas de Nivel son circunferencias de radio $R = \sqrt{C}$ y centro en el origen de coordenas.



Superficies de nivel

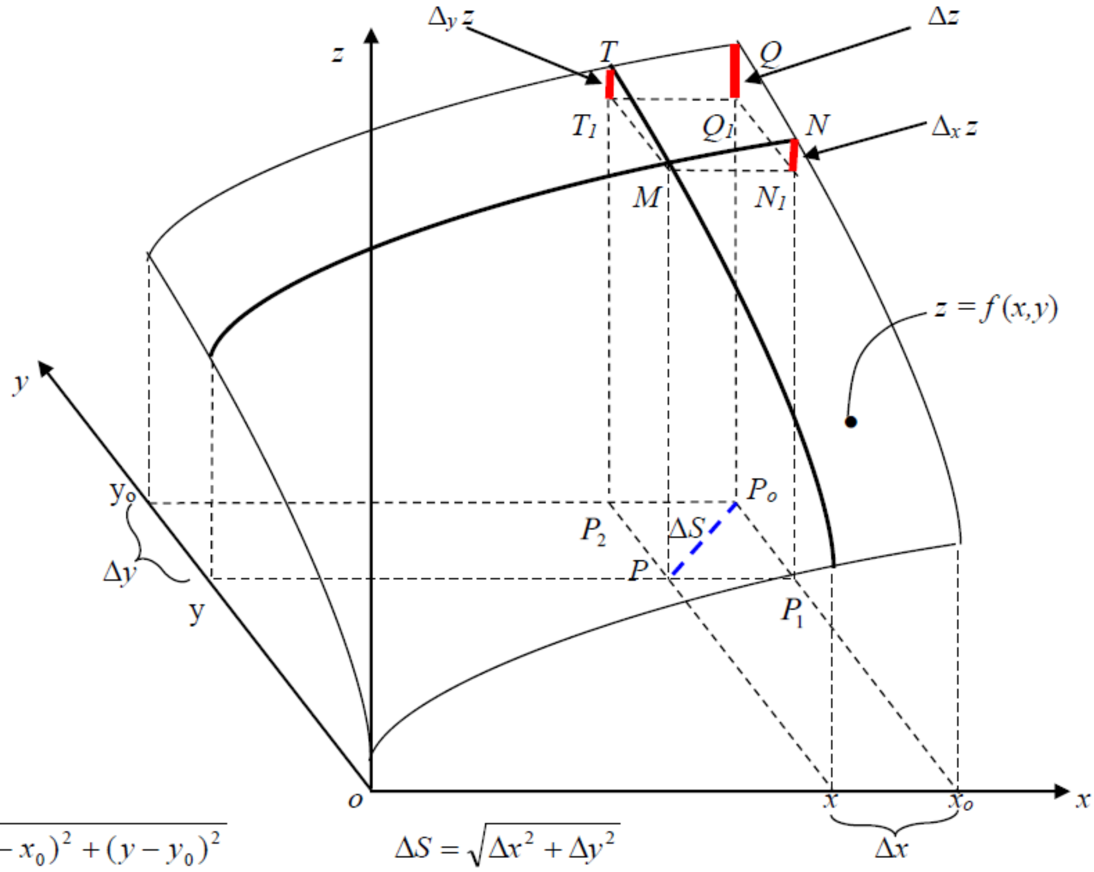
En el caso de una función de tres variables independientes podemos definir:

Superficies de Nivel de una función $u = f(x, y, z)$, *es el conjunto de todos los puntos* (x, y, z) *en los que la función toma el mismo valor.*

Cada una de estas superficies está dada por la ecuación $f(x, y, z) = C$.

Si por ejemplo $u = f(x, y, z)$ nos representa la temperatura en cada punto del dominio, $f(x, y, z) = C$ indicará un conjunto de puntos en los que la temperatura tiene el mismo valor y que forman una superficie en el espacio de coordenadas *0xyz*.

Incremento total y parcial de una función



$\Delta S = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Si analizamos la curva ***MN*** formada por la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ y el plano $y = cte.$ vemos que al desplazarnos a lo largo de la misma, **z** variará solo en función de **x**.

Si incrementamos a la variable independiente **x** en $\Delta x = \overline{PP_1} = \overline{MN_1}$ obtendremos el **Incremento Parcial de z respecto de x** (es el segmento $\overline{NN_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}$$

De igual manera, considerando a $x = cte.$ y dando a **y** un incremento $\Delta y = \overline{PP_2} = \overline{MT_1}$ obtendremos el **Incremento Parcial de z respecto de y** (que es el segmento $\overline{TT_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}$$

Si incrementamos simultáneamente a **x** en **Δx** y a **y** en **Δy** obtendremos el **Incremento Total de la función** (segmento $\overline{QQ_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}$$

De forma similar se pueden determinar los incrementos de funciones con un mayor número de variables.

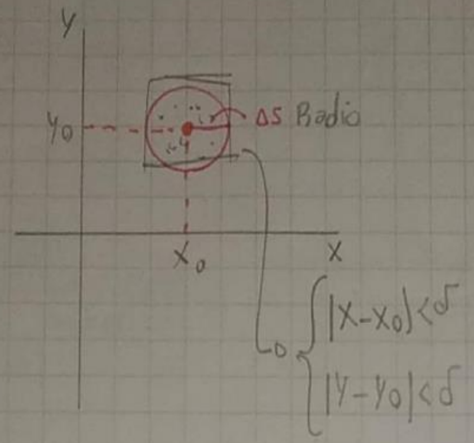
Límites

$z = f(x,y)$

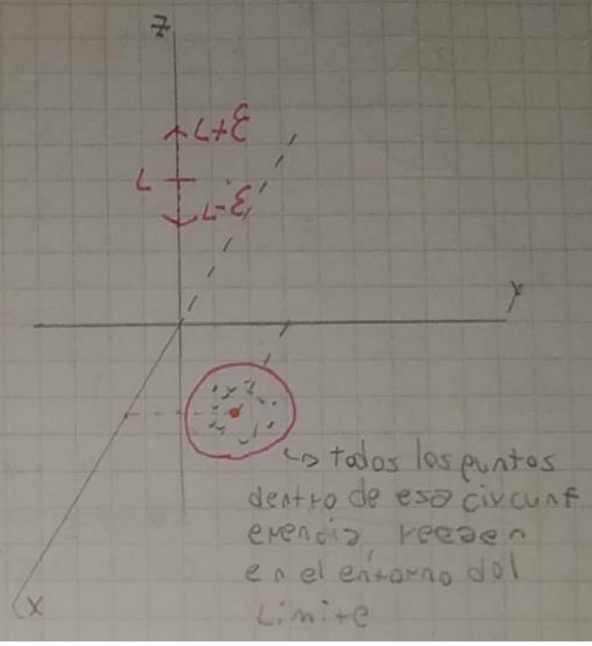
si y solo si

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = L \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \,/\, 0<\Delta s<\delta \longrightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

(Δs: dist al punto)



$$\begin{cases} |x-x_0|<\delta \\ |y-y_0|<\delta \end{cases}$$



$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ y\to 2}} 2x+y = 4$$

$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$

$$\begin{cases} 0<|x-1|<\delta \\ 0<|y-2|<\delta \end{cases}$$

$|2x+y-4|<\varepsilon$

$|2x-2+2+y-2+2-4|<\varepsilon$

$|2(x-1)+2+(y-2)+2-4|<\varepsilon$

$|2(x-1)+(y-2)|<\varepsilon$

$\boxed{|x+y|\leq|x|+|y|}$ desigualdad Triangular

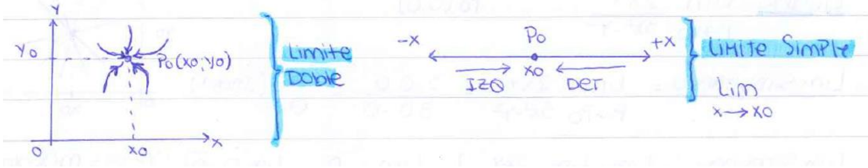
$|2(x-1)+(y-2)| \leq 2|x-1|+|y-2|<\varepsilon$

$2\delta+\delta=\varepsilon \rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{3}$

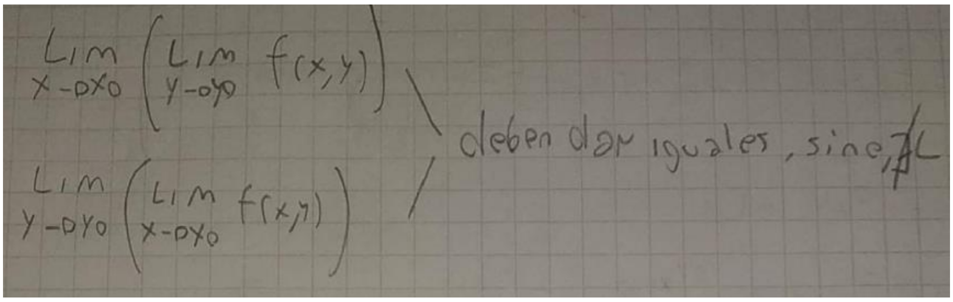
(Igualo cotas)

Límites dobles o simultáneos

Es la única manera (exceptuando resolución por definición de límite) de asegurar la existencia de este en un punto de la función.



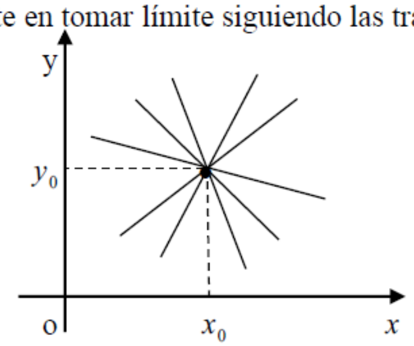
Límites sucesivos o iterados



Límites radiales

Límites Radiales

Consiste en tomar límite siguiendo las trayectorias del haz de rectas que pasan por el punto $P_0(x_0, y_0)$:



$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

Si el límite así calculado da un resultado que es función de m significa que tendrá un límite distinto para cada trayectoria, por lo tanto la función, en este caso, no tiene límite.

Resolvamos el ejemplo anterior por este método:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{la trayectoria es:} \qquad y = mx$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x.mx}{3x^2 - (mx)^2} = \frac{2m}{3 - m^2}$$

El resultado es función de m , tendrá un valor distinto para cada trayectoria, por lo tanto la función no tiene límite en $(0,0)$. Por ejemplo:

Para $m = 1$ el límite es $f(x, y) = 1$

Para $m = 2$ el límite es $f(x, y) = -4$ etc.

Continuidad

Sea la función $z = f(x, y)$ definida en un dominio D y $P_0(x_0, y_0)$ es un punto de acumulación del dominio, decimos que dicha función **es continua** en ese punto $P_0(x_0, y_0)$ si se verifica que:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)}$$

Lo que incluye tres condiciones básicas:

1- Que el límite existe para $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$
2- Que la función está definida en $P_0(x_0, y_0)$
3- Que el límite de la función es igual al valor de la función en $P_0(x_0, y_0)$.

A una función que es continua en cada punto de un dominio, se le llama **continua en este dominio**.
El significado práctico de continuidad es que si el punto $P(x, y)$ se desplaza una distancia suficientemente pequeña, el valor de la función variará también en una magnitud pequeña. En una función continua, su gráfica, es una superficie sin agujeros ni grietas.

Si la igualdad no se cumple en algún punto, a éste se le llama **punto de discontinuidad de la función**.

De igual forma se define continuidad de funciones de más de dos variables independientes.

Si no existe el límite la discontinuidad se denomina **esencial**.

Si existe el límite doble pero la función no es continua entonces la discontinuidad es **evitable**.

Discontinuidad Evitable

Se presenta cuando existe el límite doble en un punto pero la función no es continua.
Desde el punto de vista gráfico la función presenta un agujero en el punto de discontinuidad evitable.
Esta discontinuidad se puede **evitar** y transformar en continua a la función redefiniendo, dándole a la función el valor del límite en el punto.

Derivadas parciales

Función Derivable

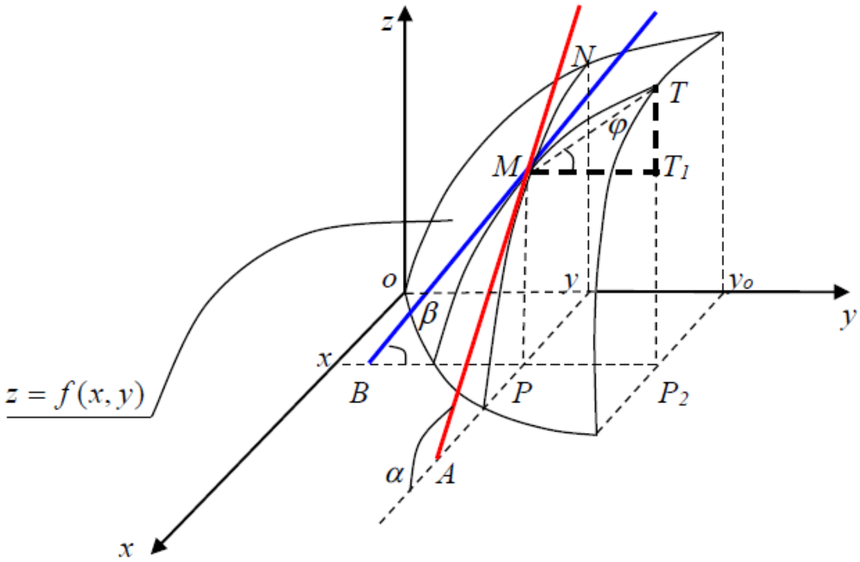
Una función de varias variables independientes, se dice que es derivable en un punto si sus derivadas parciales son únicas y finitas en ese punto, en cuyo caso, al igual que en funciones de una sola variable independiente, la funciones derivadas son continuas en ese punto.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = z'_x = \frac{dz}{dx}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = z'_y = \frac{dz}{dy}$$

Interpretación Gráfica

Consideremos la función $z = f(x,y)$ representada en el gráfico adjunto.

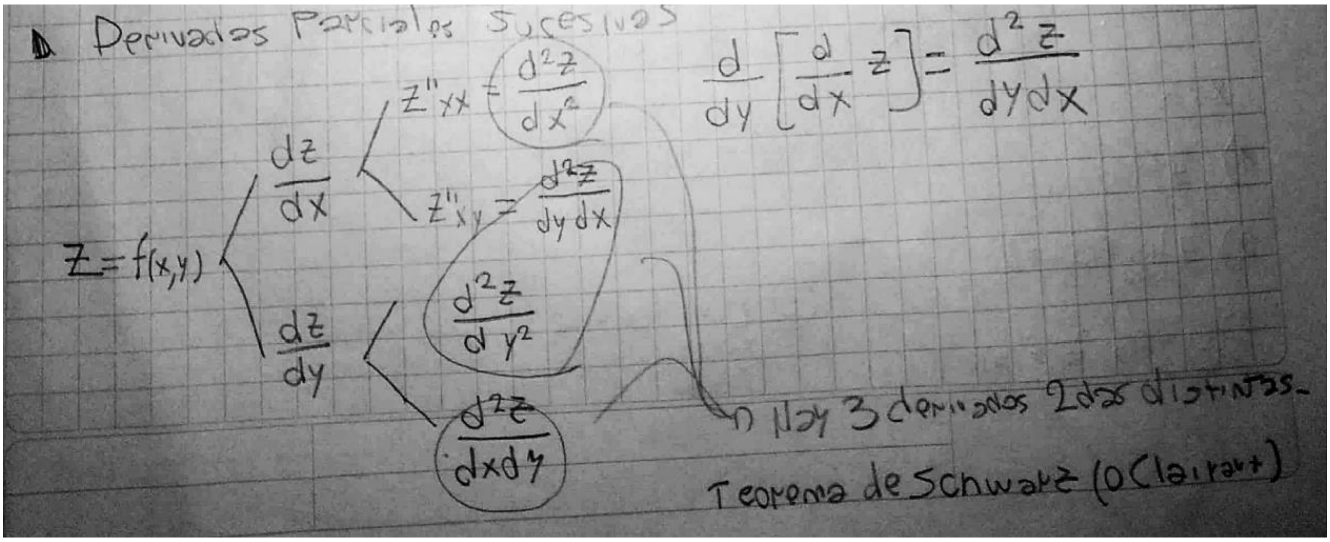


Veamos la interpretación gráfica de la $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Para ello tracemos el plano $x = cte.$, la intersección de éste con la superficie nos determina la curva MT.

Al punto $P(x,y)$ del plano $0xy$ le corresponde el punto $M(x,y,z)$ de la superficie $z = f(x,y)$.

$$tg\,\alpha = \frac{dz}{dy}(x_0, y_0) \Longrightarrow$$

Derivadas parciales sucesivas



Y así siempre que existan las derivadas correspondientes, se puede seguir derivando en forma sucesiva. De igual manera se definen las derivadas parciales sucesivas de funciones con un mayor número de variables independientes.

Estas derivadas parciales sucesivas no son todas distintas entre si, pues: *Si las derivadas parciales sucesivas a calcular son continuas, el orden de derivación no altera la derivada, siempre que la cantidad de veces que se derive respecto a cada variable sea la misma.*

En base a ello resulta:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

Teorema de Schwarz

Dada la función $z = f(x, y)$ ***definida en un dominio D, tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto*** $P(x, y)$ ***interior al dominio, entonces en ese punto se verifica que:***

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Demostración

Analicemos la expresión:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y) \qquad \textbf{(1)}$$

a) Expresemos la **(1)** de la siguiente manera:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]$$

A los dos primeros términos se los puede considerar como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}$ permanece constante) y le aplicamos el Teorema del Valor Medio.

Hacemos lo mismo con los dos últimos términos y obtenemos:

$$A = f'_y(x+\Delta x, y_1)\Delta y - f'_y(x, y_1)\Delta y \qquad \text{para} \qquad y \le y_1 \le y+\Delta y$$

$$A = [f'_y(x+\Delta x, y_1) - f'_y(x, y_1)]\Delta y$$

Apliquemos nuevamente el Teorema del Valor Medio:

$$\boxed{A = f''_{yx}(x_1, y_1)\Delta x\Delta y} \qquad \textbf{(2)} \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_1 \le x+\Delta x \\ y \le y_1 \le y+\Delta y \end{cases}$$

b) Ahora expresemos la **(1)** de la siguiente manera:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - \left[f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right]$$

Aplicando a esta última expresión el Teorema del Valor Medio obtendremos:

$$A = f'_x(x_2, y+\Delta y)\Delta x - f'_x(x_2, y)\Delta x \qquad \text{para} \qquad x \le x_2 \le x+\Delta x$$

$$A = \left[f'_x(x_2, y+\Delta y) - f'_x(x_2, y)\right]\Delta x$$

Apliquemos nuevamente el Teorema del Valor Medio:

$$\boxed{A = f''_{xy}(x_2, y_2)\Delta x\Delta y} \qquad \textbf{(3)} \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_2 \le x+\Delta x \\ y \le y_2 \le y+\Delta y \end{cases}$$

Las expresiones **(2)** y **(3)** obtenidas en **(a)** y **(b)** respectivamente son iguales a A , por lo tanto:

$$f''_{xy}(x_2, y_2)\Delta x\Delta y = f''_{yx}(x_1, y_1)\Delta x\Delta y$$

$$f''_{xy}(x_2, y_2) = f''_{yx}(x_1, y_1)$$

Tomamos límite para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, en ambos miembros:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x_1, y_1)$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)}$$

Diferencial

Aplicación: cálculo de errores, cálculos aproximados.

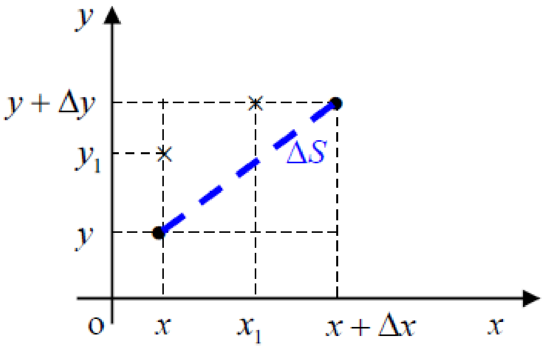
Incremento total

Dada la función $z = f(x, y)$, recordemos que su incremento total es:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

a veces no es conveniente evaluar de esta forma ya que puede resultar muy complicado el cálculo.

$$\Delta z = f'_x(x_1, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y_1)\Delta y \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_1 \le x+\Delta x \\ y \le y_1 \le y+\Delta y \end{cases}$$



Pero por hipótesis la función es continua y tiene derivadas parciales también continuas, por lo tanto:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_1, y+\Delta y) = f'_x(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad f'_x(x_1, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x, y_1) = f'_y(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad f'_y(x, y_1) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2$$

Dado que $x \le x_1 \le x+\Delta x$ e $y \le y_1 \le y+\Delta y$, entonces $x_1 \to x$ e $y_1 \to y$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ respectivamente.

Y también $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ (es decir cuando $\Delta S \to 0$).

De esta manera el incremento total es un infinitésimo compuesto:

$$\boxed{\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y} \qquad \textbf{Incremento Total}$$

Los dos últimos términos nos representan un infinitesimal de orden superior respecto de ΔS.

Diferencial total

Cuando en el incremento total despreciamos los infinitésimos:
Podemos indicar la siguiente igualdad aproximada:

$$\Delta z \cong dz$$

Los incrementos Δx y Δy de las variables independientes se llaman diferenciales de las variables independiente ***x*** e ***y,*** y se los designan dx y dy respectivamente:

$$\boxed{dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$ **Diferencial Total**

También se suele expresar:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

Diferenciales parciales

Si todas las variables independientes se consideran como constantes menos una de ellas, por ejemplo x_i, el diferencial que resulta se llama **Diferencial Parcial** de la función respecto a esa variable x_i, y se lo indica:

$$\boxed{d_{x_i} y = \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i}$$

Este **Diferencial Parcial** expresa aproximadamente la variación de la función causada por el incremento $\Delta x_i = dx_i$ de la variable independiente x_i, mientras que el **Diferencial Total** dy expresa aproximadamente la variación de la función causada por las variaciones $dx_1, dx_2, ...dx_n$ de todas las variables independientes. Puede observarse que el Diferencial Total es la suma de los Diferenciales Parciales.

Diferenciabilidad

Puedo aproximar a F(x,y) con un plano:

- Si f es diferenciable en A, f es continua en A
- Si las derivadas parciales de primer orden son continuas en un entorno de A, entonces f es diferenciable.

Diferencial de orden superior

Si $z = f(x;y)$ es continua y sus derivadas parciales también lo son. El dif. total: $dz = z'x.dx + z'y.dy$ → consideramos a $x \wedge y$ como variables independientes, entonces $dx \wedge dy$ son constantes. Supondremos que las d. parciales de 2do orden son continuas. Diferenciando:

Dif. de 2do orden: $d(dz) = d^2z = d[z'x.dx] + d[z'y.dy]$ (1)

$$d^2z = \underbrace{d[z'x].dx + d[z'x].dy}_{\text{Funciones de las v. independientes } x \wedge y} \quad (2)$$

$d[z'x] = z''xx.dx + z''xy.dy$ (3)
$d[z'y] = z''yx.dx + z''yy.dy$ (4)
} llevándolo a (2) obtendremos: ⊛

⊛ $d^2z = [z''xx.dx + z''xy.dy].dx + [z''yx.dx + z''yy.dy].dy$

$\therefore d^2z = z''xx.d^2x + \underbrace{z''xy.dy.dx + z''yx.dx.dy}_{\text{son iguales}} + z''yy.d^2y$

$$\boxed{d^2z = z''xx.d^2x + 2.z''xy.dx.dy + z''yy.d^2y}$$ Diferencial de 2do orden

$$\boxed{d^2z = (z'x.dx + z'y.dy)^{[2]}}$$

→ Cuando existen las correspondientes derivadas parciales, se puede seguir diferenciando en forma sucesiva. ←

Dif. total de 3er orden:

$$\boxed{d^3z = z'''xxx.d^3x + 3.z'''xxy.d^2x.dy + 3.z'''xyy.dx.d^2y + z'''yyy.d^3y}$$

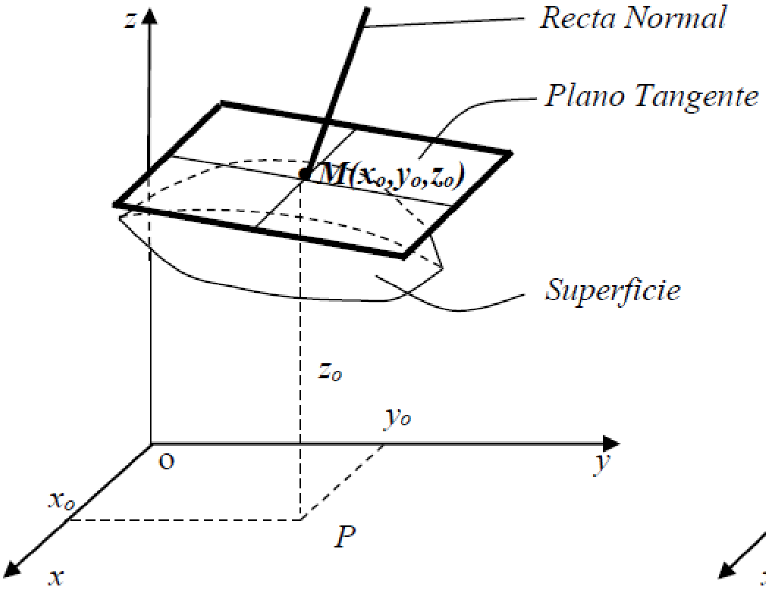
En general:

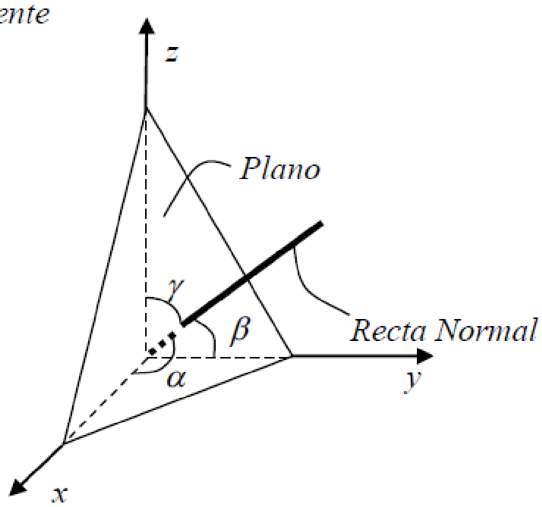
$$d^nz = (z'x.dx + z'y.dy)^{[n]}$$

[n] → indica el orden de derivación p/ las d. parciales y exponente para los diferenciales. También cuando se lo aplica al símbolo del binomio, indica el número de términos que tendrá el desarrollo en su mínima expresión.

= TRIÁNGULO DE TARTAGLIA =

Plano tangente





Análogamente la recta intersección entre el plano dado y el plano $y = y_0$ es la recta:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

Que es la recta tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje *0x*.

Por lo tanto el plano definido es el **Plano tangente** a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}$$

Plano Tangente

La **Recta Normal** a la superficie en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}}$$

Recta Normal

$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$; $-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$; 1 Son los números directores de la Recta Normal.

Derivación func. compuestas

Supongamos que en la función escalar de variable vectorial:

$$z = f(x, y) \qquad (1) \qquad R^2 \xrightarrow{f} R$$

x e **y** son funciones vectoriales de variable vectorial cuyas variables independientes son **u** y **v**:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \end{cases} \qquad (2) \qquad R^2 \xrightarrow{\varphi} R^2$$

Es decir que **z** es una Función Compuesta de las variables independientes **u** y **v**.
Las variables **x** e **y** reciben el nombre de variables intermedias.

Podemos expresar a **z** en función de las variables independientes **u** y **v**:

$$z = f[\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)] \qquad (3) \qquad R^2 \xrightarrow{\varphi_\circ f} R$$

Calcularemos $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ a partir de las funciones (1) y (2), sin necesidad de recurrir a la función (3).

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

De forma similar pero incrementando v en Δv $(u = cte)$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Regla de la cadena → se puede generalizar p/ la derivación de funciones con mayor número de variables.

Derivación func. implícitas

Teorema de existencia y derivabilidad de funciones implícitas

Si $g(x;y)=0 \rightarrow$ continua en cierto dominio que contiene al pto $(x_0;y_0)$

y se verifica
- $g(x_0;y_0)=0$
- $g'_x \wedge g'_y \rightarrow$ existen y son continuas
- $g'_y \big|_P \neq 0$

Caso 1

Sea la función $g(x,y)=0$ $\qquad R^{1+1} \xrightarrow{g} R \qquad (1)$

Que define implícitamente a la función:

$$y = f(x) \qquad R \xrightarrow{f} R \qquad (2)$$

Calcularemos la derivada de la función (2), es decir $\frac{dy}{dx}$, a partir de la Función Implícita (1).

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}}$$

Debiendo comprobarse como condición que $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$.

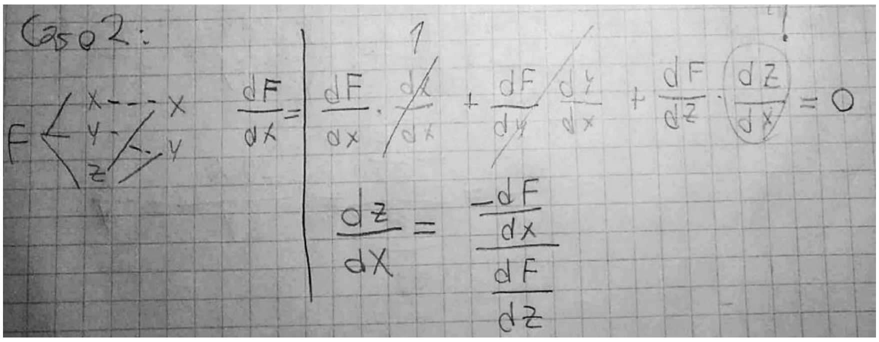
Caso 2

Sea la función $g(x, y, z) = 0$ $\quad R^{2+1} \xrightarrow{g} R \quad (1)$

Que define implícitamente a la función:

$$z = f(x, y) \qquad R^2 \xrightarrow{f} R \qquad (2)$$

Calcularemos las derivadas de la función (2), es decir $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, a partir de la Función Implícita (1).



De igual manera para dz/dy

Caso 3

Sea el sistema de funciones:

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Que define implícitamente a las funciones:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases} \qquad R \longrightarrow R^2 \qquad (2)$$

Calcularemos las derivadas de las funciones (2), es decir $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$, a partir de la Función Implícita (1).

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dx}=1$ y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial g_2}{\partial x} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ($\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1).
Podemos resolver este sistema aplicando la Regla de Cramer:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & -\frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & -\frac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

Determinante jacobiano

Este Determinante Jacobiano es el determinante que está formado por las derivadas parciales de las funciones cuyas filas están definidas por las funciones y sus columnas por las variables con respecto a las que se derivan estas funciones.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}=J\left(\frac{g_1,g_2}{y,z}\right)=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)}$$

Si este determinante no se anula, entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.

Podemos utilizar una notación similar para los otros jacobianos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}=J\left(\frac{g_1,g_2}{x,z}\right)=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,z)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}=J\left(\frac{g_1,g_2}{y,x}\right)=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,x)}$$

Caso 4

Sea el sistema de funciones:
$$\begin{cases} g_1(x,y,u,v)=0 \\ g_2(x,y,u,v)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Que define implícitamente a las funciones:

$$\begin{cases} u=f_1(x,y) \\ v=f_2(x,y) \end{cases} \qquad R^2 \longrightarrow R^2 \qquad (2)$$

Debemos calcular las derivadas de las funciones (2), es decir $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, a partir de la Función Implícita (1).

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{dx}+\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{dx}+\frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dx}=1$ y $\frac{dy}{dx}=0$, y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial g_2}{\partial x} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1').

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ -\frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{x,v}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,x}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

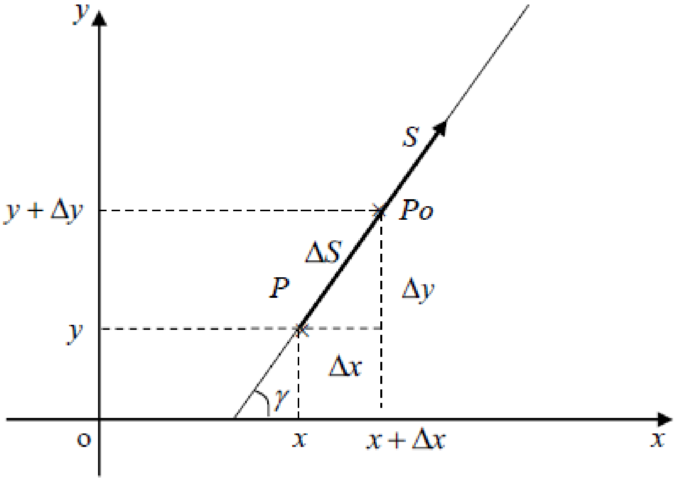
Se repite el mismo proceso para *du/dy* **y** *dv/dy*

Derivada direccional

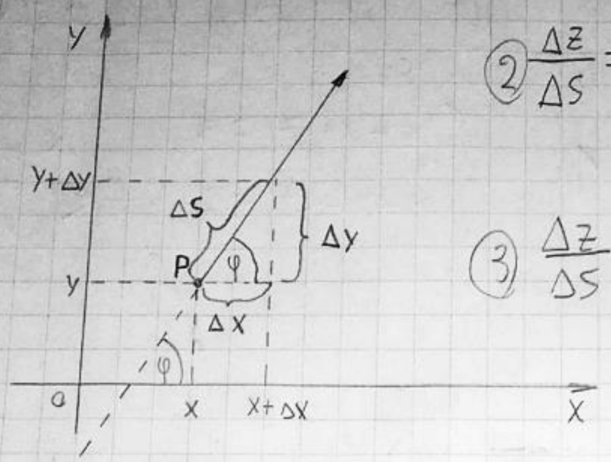
Consideremos la función $z = f(x,y)$ definida en un dominio D que contiene al punto $P(x,y)$. Por este punto tracemos un vector S que forma con el eje $0x$ un ángulo γ.

Tomemos otro punto $P_0(x+\Delta x, y+\Delta y)$ sobre la dirección del mismo vector S a una distancia ΔS de su origen.

$$\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$



$z = f(x,y)$



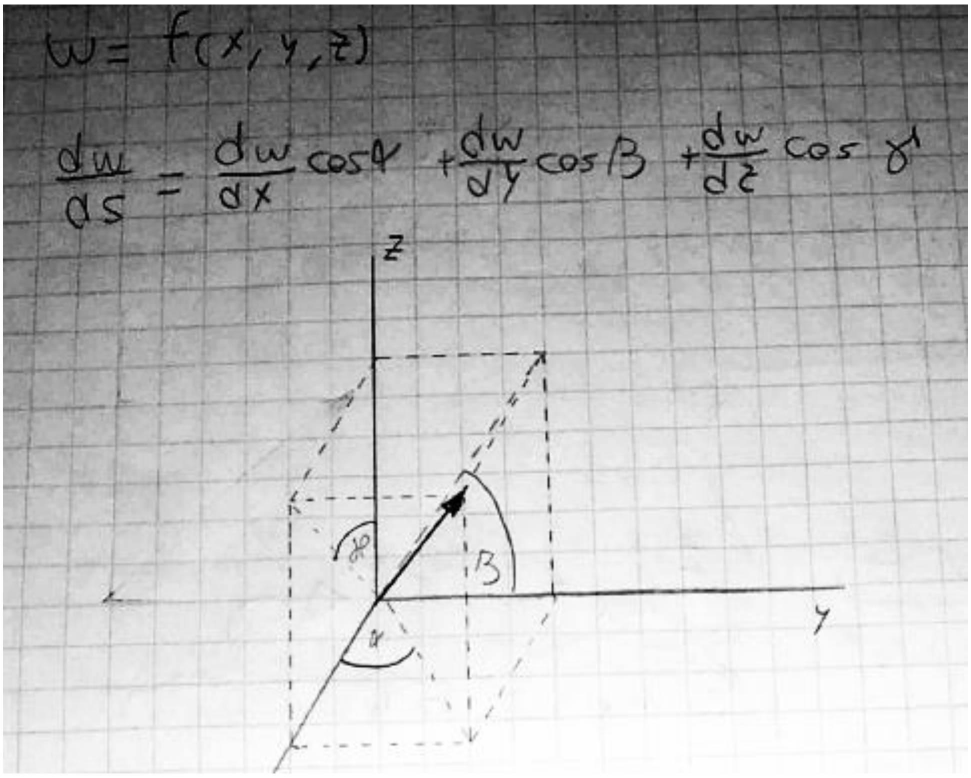
(1) $\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

(2) $\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{dz}{dx}\overset{\cos\varphi}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta S}\right)} + \frac{dz}{dy}\overset{\text{sen}\,\varphi}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta S}\right)} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta S} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta S}$

(ver gráfico)

(3) $\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{dz}{dx}\cos\varphi + \frac{dz}{dy}\,\text{sen}\,\varphi + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2\,\text{sen}\,\varphi$

En R3:



Gradiente

$$F'_\alpha(a,b) = \underbrace{F'_x(a,b)}_{v_1}\,\underbrace{\cos\alpha}_{\mu_1} + \underbrace{F'_y(a,b)}_{v_2}\,\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{\mu_2}$$

$$= \underbrace{F'_x(a,b),\ F'_y(a,b)}_{\vec{\nabla} F(a,b)} \cdot \underbrace{(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)}_{\vec{\mu}}$$

Gradiante

unitario
Define dirección

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left[\frac{F'_y(a,b)}{F'_x(a,b)}\right]$$

$\to \alpha\, c_1$

$\to \alpha\, c_2$

El vector gradiente apunta siempre en la dirección de máximo crecimiento.

El valor de la pendiente máxima es: $|\vec{\nabla} F(a,b)|$

Propiedades

1. **La derivada de Z=F(x,y) en P(x,y) según la dirección a es igual al producto escalar del vector gradiente de esta función en P por el vector unitario So correspondiente a esa dirección (proyección del gradiente sobre So)**

Si $f'_\gamma(x;y) = \bar{\nabla} z \cdot \bar{S}_0 = |\bar{\nabla} z| \cdot |S_0| \cdot \cos\varphi$

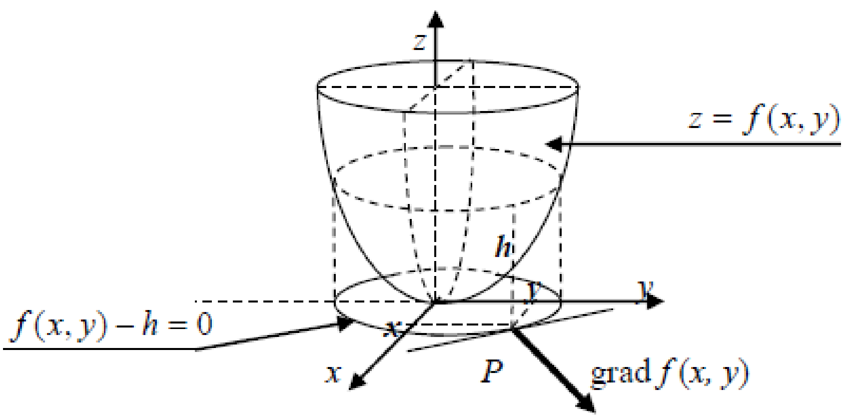
y como $|S_0| = 1 \Rightarrow \boxed{f'_\gamma(x;y) = |\bar{\nabla} z|\, \cos\varphi}$

demostrándose que la Ddireccional es igual a la proyección del $\bar{\nabla} z$ en el vector S_0

2. **El vector gradiente es normal a la recta tangente a la línea de nivel en el punto considerado.**

"En cada punto $P(x,y)$ el vector Gradiente está dirigido según la Normal en ese punto a la Línea de Nivel de la superficie $z = f(x,y)$ ".

En efecto, consideremos que en el punto $P(x,y)$ la función $z = f(x,y)$ toma el valor h.



3.

"La derivada de la función , en el punto $P(x, y)$, en la dirección de la recta tangente a la Línea de Nivel en dicho punto, es igual a cero".

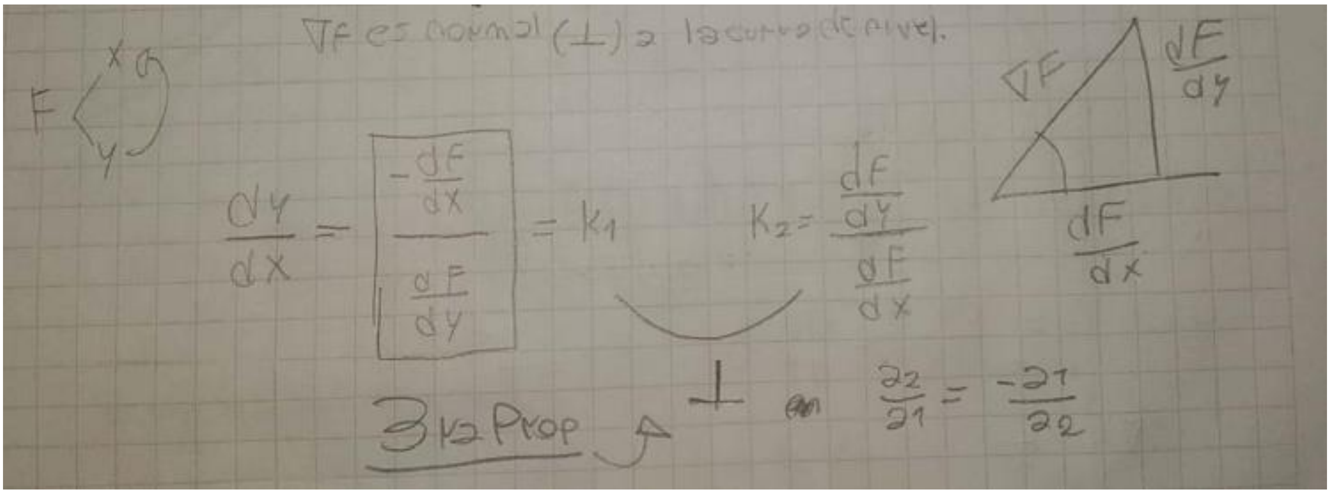
En efecto, recordemos la igualdad (1):

$$f'_y(x,y) = |\text{grad}\, f(x,y)|\cos\varphi$$

Si calculamos la derivada en la dirección de la recta tangente a la Línea de Nivel será:

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ es decir $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ por lo tanto resulta:

$$f'_y(x,y) = 0$$



Polinomio de Taylor

N/P → como elijo el punto a o X_0

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \to \boxed{a} \text{ ó } \boxed{X_0} < \xi < X$$

$$P_{n(x)} = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

$$f_{(a)} + \frac{f'_{(a)}(x-a)}{1!} + \frac{f''_{(a)}(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''_{(a)}(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{n}_{(a)}}{n!}(x-a)^n$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

FORMA SIMBOLICA.

$$f(x;y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left[f'_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y\right]^{[i]} + R_n$$

[i] → orden de derivación p/ las derivadas parciales y exponente para los incrementos Δx y Δy, teniendo en cuenta $[f'_x(x_0;y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\,\Delta y]^{[0]} = f(x_0;y_0)$ y $0! = 1$

Formula de Maclaurin: es la formula de Taylor p/ el $P_0(x_0;y_0) = (0;0)$

$$f(x;y) = f(0;0) + f'_x(0;0).x + f'_y(0;0)y + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0;0).x^2 + 2f''_{xy}(0;0)xy + f''_{yy}(0;0)y^2\right] + R_2$$

Maclaurin (a = 0)

$$P_n(x) = F(0) + \frac{x}{1!}F'(x_0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0)$$

Extremos relativos

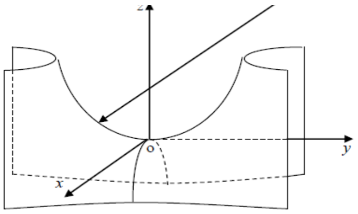
Dada la función $z = f(x,y)$ podemos definir sus máximos y mínimos de la siguiente forma:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f < 0$, la función tiene un **Máximo Relativo (o Local)** en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Y si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f > 0$, la función tiene un **Mínimo Relativo (o Local)** en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Punto de ensilladura



Hay funciones en donde algunos puntos se anulan sus derivadas parciales y no son extremos. Los llamamos Punto de Ensilladura.
Los Puntos donde las d.Parciales se anulan se llaman Puntos Críticos, osea que si la función tiene algún extremo puede solo estar en el PC

Condición suficiente

Sea Z=f(x,y) continua y con derivadas parciales continuas en un dominio que comprende a Po(Xo,Yo)
considerándolo como un punto crítico (las derivadas parciales en ese punto son igual a 0). La función tendrá o nó un extremo relativo:

$$H(x_0;y_0) = f''_{xx}|_{P_0} \cdot f''_{yy}|_{P_0} - \left[f''_{xy}|_{P_0} \right]^2$$

→ $H(x_0;y_0) > 0 \wedge f''_{xx}|_{P_0} < 0$ = MÁXIMO RELATIVO en $P_0(x_0;y_0)$

→ $H(x_0;y_0) > 0 \wedge f''_{xx}|_{P_0} > 0$ = MÍNIMO RELATIVO en $P_0(x_0;y_0)$

→ $H(x_0;y_0) < 0$ ⇒ Punto de ensilladura en $P_0(x_0;y_0)$

→ $H(x_0;y_0) = 0$ = Punto de Incertidumbre

$H(x_0;y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx}|_{P_0} & f''_{xy}|_{P_0} \\ f''_{xy}|_{P_0} & f''_{yy}|_{P_0} \end{bmatrix}$ → Resibe el nombre de Hessiano y selo suele escribir en forma de determinante

Demostración

Demostración: La formula de Taylor para $n=2$ de $z=f(x;y)$ se expresa:

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)=f(x_0;y_0)+F'x|_{P_0}\cdot\Delta x+F'y|_{P_0}\cdot\Delta y+\frac{1}{2!}\left[F''xx|_{P_0}\cdot\Delta x^2+2F''xy|_{P_0}\cdot\Delta x\Delta y+F''yy|_{P_0}\cdot\Delta y^2\right]+R_2$$

Las derivadas parciales de 1er orden se anulan por ser P_0 un Punto Critico.

$$\Delta f=f(x_0+\Delta y;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$$

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\left[F''xx|_{P_0}\cdot\Delta x^2+2F''xy|_{P_0}\Delta x\Delta y+F''yy|_{P_0}\cdot\Delta y^2\right]+R_2$$

Se pretende analizar el signo de la función (si es un incremento o decremento)

$$\Delta f=\frac{\Delta S^2}{2!}\left[F''xx|_{P_0}\cdot\frac{\Delta x^2}{\Delta S^2}+2F''xy|_{P_0}\cdot\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta S^2}+F''yy|_{P_0}\cdot\frac{\Delta y^2}{\Delta S^2}\right]+R_2$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta S}=\cos\varphi \quad \wedge \quad \frac{\Delta y}{\Delta S}=\operatorname{sen}\varphi$$

Completamos el cuadrado de un binomio, considerando $f_{xx}\neq 0$, multiplicamos y dividimos por f_{xx} dentro del corchete y sumamos y restando $f^2_{xy}\cdot\operatorname{sen}^2\varphi$

$$\boxed{\Delta f=\frac{\Delta S^2}{2!}\left\{\frac{(F^2xx\cos^2\varphi+f_{xy}\operatorname{sen}\varphi)^2+(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)\operatorname{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right\}+R_2}\quad(2)$$

Δf depende del signo de $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)$ y de f_{xx} del denominador

POSIBILIDADES:

① $\boxed{(f_{xx}f_{yy}-f^2_{xy})>0}$ $\quad f_{xx}<0\rightarrow$ Forma un máximo

En el numerador de (2) tenemos la suma de 2 magnitudes positivas que no se anulan simultaneamente. La segunda se anula cuando incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi=0$, pero no se anula la primera que se anula cuando incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$

Como $R_2\rightarrow 0$ cuando $\Delta S\rightarrow 0$: para todo incremento ΔS

$\Delta f<0$ ó $f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)<f(x_0;y_0)$ } para todos los ptos próximos a $P_0(x_0;y_0)$

...φ' ...e define ...l máx o ...ín a partir ...e la serie ...e Taylor es ...e d. Parcial ↓ ...e define ...l signo del ...ociente de la función

② $\boxed{(f_{xx}f_{yy}-f^2_{xy})>0}$ $\quad f_{xx}>0\rightarrow$ Forma un mínimo

determinamos $\Delta f>0$ ó $f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)>f(x_0;y_0)$ } para todos los puntos próximos a $P_0(x_0;y_0)$

(3) $\boxed{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 \quad f_{xx} > 0}$ → PUNTO de ENSILLADURA

No tiene ni máximos ni mínimos. ΔF cambia el signo al incrementar en uno u otra dirección. Si incrementamos $\varphi = 0$ resulta:

$$\boxed{\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!} f_{xx} + R_2 > 0} \longrightarrow \text{la función crece}$$

Si incrementamos en $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ resulta: $\boxed{\Delta F = \frac{\Delta S}{2!}\left\{\frac{(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\, \operatorname{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right\} + R_2 < 0}$

la función decrece

(4) $\boxed{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) < 0 \quad f_{xx} < 0}$ No hay extremo en el pto considerado

(5) $\boxed{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) < 0 \quad f_{xx} = 0}$ entonces $f_{xy} \neq 0$ y suponemos que $f_{xx} = 0$

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!} (2 f_{xy} \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}^2\varphi) + R_2$$

$$\Delta F = \frac{\Delta S^2}{2!} \operatorname{sen}\varphi\, (2 f_{xy} \cos\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}\varphi) + R_2$$

Para valores pequeños de φ $(2 f_{xy} \cdot \cos\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}\varphi)$ conserva su signo. Su valor es próximo a $2 f_{xy}$

del paréntesis

en cambio $\operatorname{sen}\varphi$ cambia de signo al tomar φ mayor o menor que cero. Tomando un ΔS pequeño para que R_2 no influya en el resultado, el signo de ΔF va a depender del signo de φ (la función no tiene extremo)

(6) $\boxed{(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) = 0 \quad \text{así por ejemplo } f_{xx} \neq 0}$

$$\Delta F = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{(f_{xx} \cos\varphi + f_{xy} \operatorname{sen}\varphi)^2}{f_{xx}}\right] + R_2$$

cuando incrementamos en la dirección de $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ resulta: $\Delta F = R_2$

Es el término complementario de la F. de Taylor cuyo valor y signo desconocemos nos impide determinar si hay o no extremo

Uso práctico

1- **Se determinan los puntos Críticos (Condición Necesaria)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{Se determinan las raíces} \quad \begin{cases} (x_1, y_1) \\ \text{``} \\ \text{``} \\ (x_n, y_n) \end{cases} \quad \text{Puntos Críticos}$$

2- **Se analiza el signo del Hessiano para cada uno de los Puntos Críticos**

$$H(x_i, y_i) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \ \text{ hay un Extremo} \\ \\ < 0 \ \text{no hay extremo (hay Punto de Ensilladura)} \\ \\ = 0 \ \text{nada puede asegurarse} \end{cases}$$

3- **En los puntos (x_i, y_i) donde resulta $H_i > 0$ se determina el tipo de Extremo analizando el signo de: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (cuando hay Extremo ambas tienen el mismo signo)**

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} \ \text{o} \ \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \begin{cases} < 0 \ \text{ hay un Máximo} \\ \\ > 0 \ \text{hay un Mínimo} \end{cases}$$

4- **Si se desea conocer la coordenada z_i del Extremo obtenido, obtenemos el valor de la función en el punto (x_i, y_i) correspondiente.**

Extremos Condicionados

Uso práctico: optimización

$z = f(x,y) \;\cap\; \varphi(x,y) = 0$

→ se calculan máx y min en la intersección de las 2 ec.

$z < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \qquad \varphi < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ (Igualo a 0 para calc. extremos.)

① $0 = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$ Inc. / $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ Inc.

→ queda formado un sistema.

Despejo Inc.

② $\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \;\longrightarrow\; \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = (-\lambda)$ multiplicador de lagrange.

③
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Sist donde la cond: $\varphi(x,y) = 0$

④ $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$ → al calcular máx y min en esta función tenemos los máx y min.

Uso práctico

Para determinar los posibles extremos de la función:

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Se plantea la **Función Auxiliar de Lagrange**:

$$\boxed{F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)} \qquad (7)$$

Luego se igualan a cero sus derivadas parciales con respecto a x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Finalmente se resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

(Un método común y más utilizado es despejar lambda de las primeras ecuaciones.)

Este método puede ser aplicado en el estudio de Extremos condicionados de una función de "*n*" variables relacionadas mediante "*m*" ecuaciones de condición. Debiendo ser ***m*<*n***.

Sea en general calcular los Extremos de la función:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \qquad (1')$$

Que cumpla con las condiciones:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \\ \qquad \text{''} \\ \qquad \text{''} \\ \qquad \text{''} \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2')$$

Se plantea la **Función Auxiliar de Lagrange**:

Integrales Múltiples

Integrales Dobles

Lo que hacemos es dividir al intervalo **[a,b]** en **n** partes y **[c,d]** en **m** partes.
El área del rectángulo **Rij** es el producto de estas partes de los intervalos.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad \text{y} \qquad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$$

Usando lo que se llama **Suma de Riemann** tenemos que:

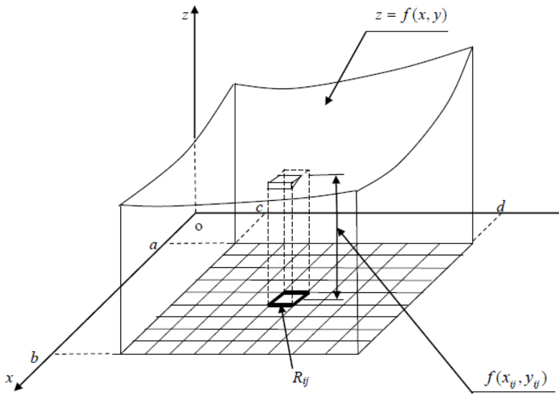


Figura 2b

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$

Cada término de esta suma es el volumen de un sólido de base ΔA_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$ y el valor de esta suma es el volumen de un cuerpo.

Tomando límite de esa sumatoria, con **m** y **n** que tienden a infinito, tendremos el volumen generado por la función en el rectángulo {**[a,b],[c,d]**}

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\text{máx}\Delta A \to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} \qquad \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy$$

Cálculo

Cuando calculamos integrales se hace por medio de **integrales iteradas** o **sucesivas** es decir, primero integraremos en una dirección y luego en otra.

$R = [a,b]\times[c,d]$ de la Figura 1b:

$$I_R = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Para rectángulos es muy sencillo, pero cuando son formas más complejas se hace de la siguiente manera, **tener en cuenta, que deberíamos elegir la variable a integrar según no nos obligue a dividir el intervalo.**

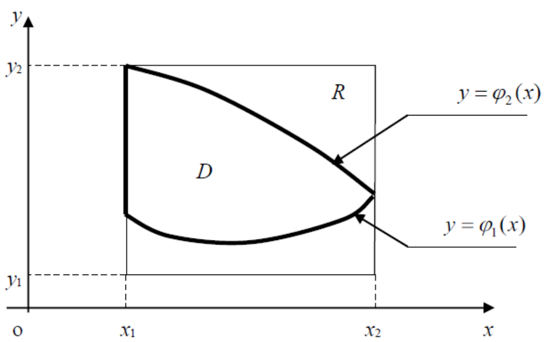


Figura 7

Tomamos como límite de integración primero: una función que demarque el límite superior de esta sup, luego otra que demarque el límite inferior de esta. **Hacemos el primer integrando.**
Luego tomamos como límites la extensión de esta área en el otro eje: **X1** y **X2**, y resolviendo el segundo integrando, tendremos la integral resuelta.

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

Propiedades

1. La Integral Doble de la suma de dos funciones, extendida en un dominio D, es igual a la suma de las Integrales Dobles extendidas en dicho dominio de cada una de las dos funciones.

$$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\,dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

2. El factor constante se puede extraer fuera del signo de Integral Doble.

$$\iint_D c.f(x,y)dxdy = c.\iint_D f(x,y)dxdy \qquad c = \text{constante}$$

3. Si el dominio **D** está dividido en dos dominios parciales **D1** y **D2**, sin poseer puntos interiores comunes y **f (x, y)** es continua en todos los puntos del dominio **D** entonces:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

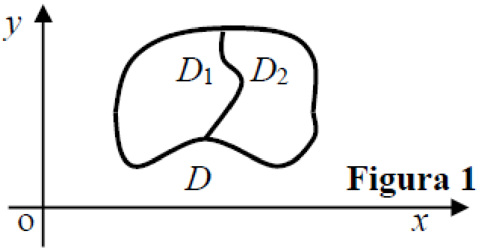


Figura 10

Esta propiedad es válida también para un mayor número de divisiones del dominio.

4. Si **f1(x,y) >= f2(x,y)** en todos los puntos del dominio **D**, tendremos que:

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy \geq \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

5. Si **f(x,y) = 1** en todo el dominio **D**, entonces la Integral Doble de la función **f(x,y)** extendida en el dominio **D** nos da el área de dicho dominio.

$$A_D = \iint_D 1dxdy \qquad \text{siendo } A_D \text{ el Área del dominio } D \qquad \boxed{A_D = \iint_D dxdy}$$

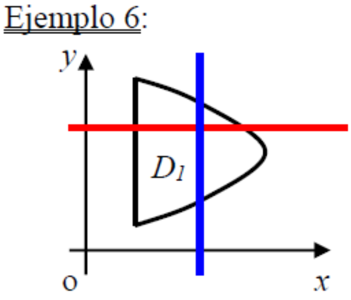
6. Si **C1** y **C2** son dos constantes tal que **C1 <= f(x,y) <= C2** en todo el dominio **D**, entonces se cumple que:

$$C_1.A_D \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq C_2.A_D \qquad \text{siendo } A_D \text{ el Área del dominio } D$$

Dominio Regular

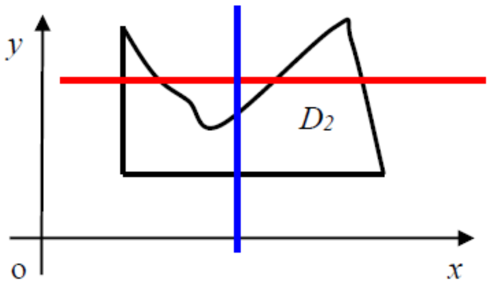
"Un **Dominio es Regular en la dirección del eje x**, si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera en solo dos puntos".
De igual manera: "**Un Dominio es Regular en la dirección del eje y**, si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera en solo dos puntos".
Si el dominio es regular en la dirección de los dos ejes coordenados, se dice simplemente que el **Dominio es Regular.**

Ejemplo 6:



D_1: Dominio Regular

Figura 13



D_2: Dominio Regular en la dirección del eje "y".
No es regular en la dirección del eje "x".

Si el **dominio** de integración **no es regular** ni en la dirección del eje "**x**", ni en la dirección del eje "**y**", entonces para poder integrar se lo debe **dividir en Subdominios Regulares**, aplicando la **propiedad nº 3.**
Igualmente, si alguno de los límites de integración no puede ser expresado con una sola expresión algebraica, también se debe subdividir el dominio para poder integrar. Por ejemplo:

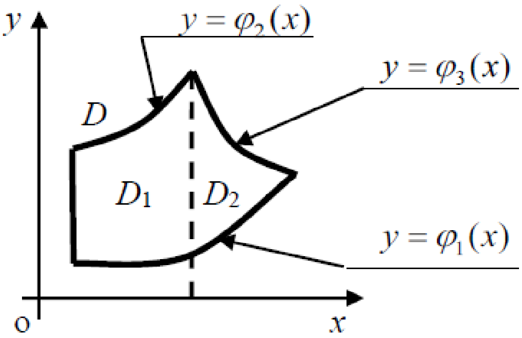


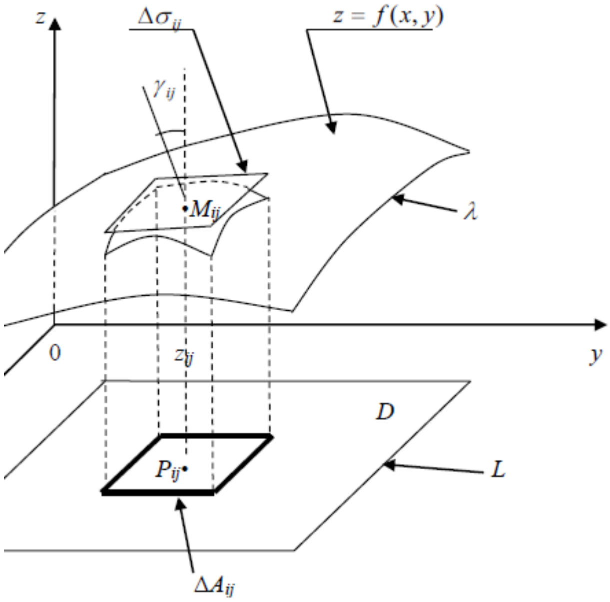
Figura 14

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Usos prácticos

- $\iint_D \, dxdy$ -> Área del dominio **D**.
- $\iint_D \, f(x,y)dxdy$ -> Volumen de la función en el área **D**.
- $\iint_D \, [g(x,y) - f(x,y)]dxdy$ -> Volumen entre funciones delimitadas en el área **D**.

Áreas de superficie



Un uso de las integrales dobles es para calcular el área de una superficie descrita por una función **f(x,y)**.

Dividimos el área **D** en subdominios **Aij** como antes. En esta área, a un punto **Pij** le corresponde una imagen **M**ij. En ese punto, trazamos un plano tangente.

$$z - z_{ij} = \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}(x - x_{ij}) + \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}(y - y_{ij})$$

Sobre ese plano tomamos un rectángulo de área $\Delta\sigma_{ij}$ tal que proyectado sobre el plano **xy** resulte en el rectángulo **R**ij. Sumamos estas áreas para toda el área **D** (haciendo límite a infinito para hacerla infinitamente más pequeña):

$$A_S = \lim_{\text{máx}\Delta\sigma \to 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_{ij}$$

Si llamamos γ_{ij} al ángulo formado por el Plano Tangente y el plano $0xy$ tendremos:

$$\Delta A_{ij} = \Delta\sigma_{ij} \cos\gamma_{ij} \qquad \text{ó} \qquad \Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{\cos\gamma_{ij}}$$

El ángulo γ_{ij} es también el Ángulo Director formado por la Recta Normal a la superficie en el punto M_{ij} con el eje $0z$. Por ello en virtud de la ecuación del Plano Tangente, podemos escribir:

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1}}$$

Reemplazando todo esto en el límite de la sumatoria anterior:

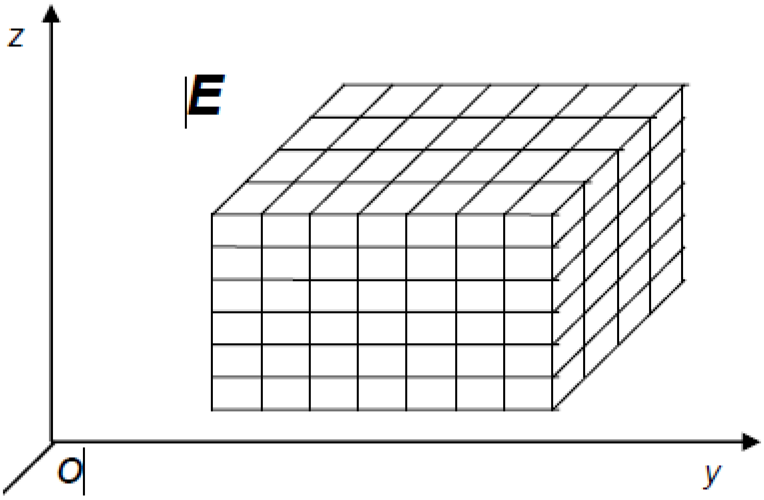
$$A_S = \lim_{\text{máx}\Delta A \to 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1} \cdot \Delta A_{ij}$$

Entonces:

$$\boxed{A_S = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^2 + 1}\ .dxdy} \qquad \boxed{A_S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ .dxdy}$$

Integrales Triples

El concepto de Integrales Dobles puede ser ampliado a Integrales Triples adaptando lo definido para funciones de dos variables a funciones de tres variables independientes.
Consideremos la función **u = f(x,y,z)** , continua en el Dominio con forma de paralelepípedo rectángulo **E = [a,b].[c,d].[p,q]**



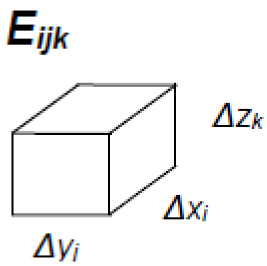


Figura 29

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n = b$$
$$y_0 = c, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_m = d$$
$$z_0 = p, z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_l = q$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \text{y} \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Dividimos el intervalo en **n, m** y **l** partes según cada dimensión, y calculamos el **volumen del subdominio E**ijk

Elegimos un punto interior al dominio: $M_{ijk}(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$
y formamos la **sumatoria triple de riemann**

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

Tomando límite que tiende al infinito para **i, j** y **k** tenemos:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \lim_{\text{máx}\Delta V \to 0} \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

Si este límite existe, **f (x,y,z)** es integrable.

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

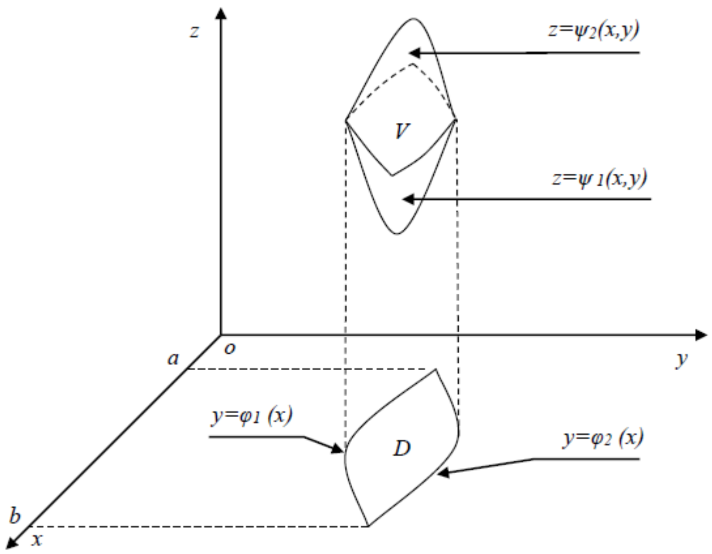
Cálculo

Se realiza de igual manera que las integrales dobles, **por medio de integrales iteradas**.

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz:$$

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx:$$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



Propiedades

1. La Integral Triple de la suma de dos funciones, extendida en un dominio V, es igual a la suma de las Integrales Triples extendidas en dicho dominio de cada una de las dos funciones.

$$\iiint_V [f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)]dxdydz = \iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz + \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

2. El factor constante se puede extraer fuera del signo de Integral Triple.

$$\iiint_V c.f(x,y,z)dxdydz = c.\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \qquad c = \text{constante}$$

3. Si el dominio **V** está dividido en dos dominios parciales **V1** y **V2**, sin poseer puntos interiores comunes y **f (x, y, z)** es continua en todos los puntos del dominio V entonces:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Esta propiedad es válida también para un mayor número de divisiones del dominio.
Igual que en Integrales Dobles si alguno de los límites de integración no puede ser dado con una sola expresión algebraica se debe subdividir el dominio aplicando esta propiedad.

4. Si **f1(x,y,z) >= f2(x,y,z)** en todos los puntos del dominio **V**, tendremos que:

$$\iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

5. Si **f(x,y,z) = 1** en todo el dominio **V**, entonces la Integral Triple de la función **f(x,y,z)** extendida en el dominio **V** nos da el volúmen de dicho dominio.

$$V = \iiint_V 1.dxdydz \qquad \text{siendo } V \text{ el volumen del dominio } V$$

6. Si **C1** y **C2** son dos constantes tal que **C1 <= f(x,y,z) <= C2** en todo el dominio **V**, entonces se cumple que:

$$C_1.V \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq C_2.V \quad \text{siendo } V \text{ el volumen del dominio } V.$$

Cambios de variables

Cuando nosotros hacemos un cambio de variables, estamos haciendo una **transformación lineal**. Debemos considerar que las variables de la función original son funciones de otras variables.

$$\begin{cases} x = g_1(u,v,w) \\ y = g_2(u,v,w) \\ z = g_3(u,v,w) \end{cases}$$

Al hacerlo, también tendremos que ajustar nuestra integral por el **Jacobiano de la Transformación:**

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Coordenadas polares (Int. Dobles)

El cálculo de una integral se puede simplificar mediante un conveniente cambio de variables. Hay integrales dobles en las que su cálculo en coordenadas rectangulares es más bien complicado y que sin embargo se pueden resolver más fácilmente en coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\left|J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)\right| drd\theta$$

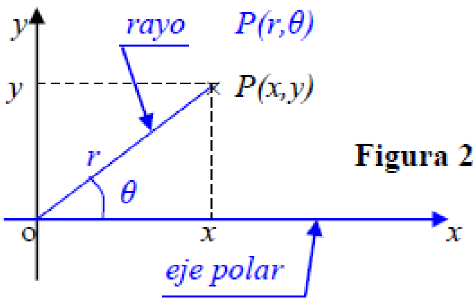


Figura 21

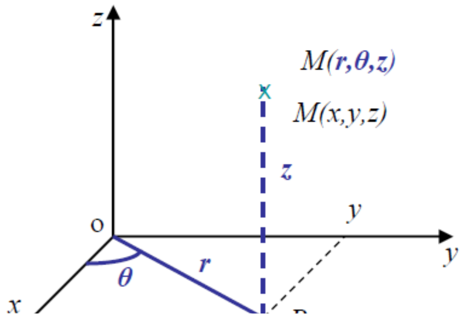
Al analizar, el **Jacobiano de la Transformación** es:

$$J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r$$

Entonces:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdrd\theta}$$

Coordenadas Cilíndricas (Int. Triples)



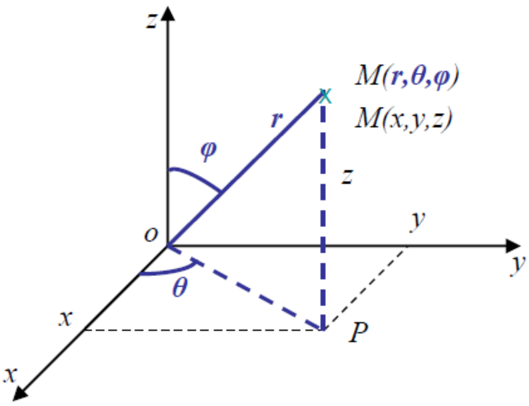
En Coordenadas Cilíndricas la posición de un punto **M** en el espacio se determina por r, θ, z

- r, θ son las coordenadas polares de la proyección del punto **M** sobre el plano **xy**
- $z$es la distancia del punto al plano **xy**
- $z$es positiva si el punto **M** está sobre el plano **xy** y es negativa cuando está por debajo.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty \le z \le \infty \end{cases} \quad J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,z)\, r\, dr d\theta\, dz}$$

Coordenadas Esféricas (Int. Triples)



En Coordenadas Esféricas la posición de un punto M en el espacio se determina por r, θ, φ

$$\begin{cases} x = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\operatorname{sen}\varphi \end{matrix}\right\| = r^2\operatorname{sen}\varphi$$

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\, r^2\operatorname{sen}\varphi\, dr d\theta\, d\varphi}$$

Integrales Curvilíneas

El concepto de Integral Curvilínea se puede obtener a partir de generalizar la Integral Simple reemplazando el intervalo de integración (definido sobre un eje) por una curva plana (en R2) o por una curva alabeada (en R3).

Sea un **Campo Vectorial F** definido a lo largo de una curva plana **L** indicada en la figura.

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

Dividimos la curva **L** en **n** subarcos:

$$A_0 = A, A_1, A_2, \dots\dots\dots A_n = B$$

Asociando esto con el trabajo de una fuerza:
El trabajo que realiza la fuerza F a lo largo del arco $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ es: $T_i \cong F_i \Delta s_i$

Será ΔS_i el vector que une a los dos puntos donde se traza la curva:

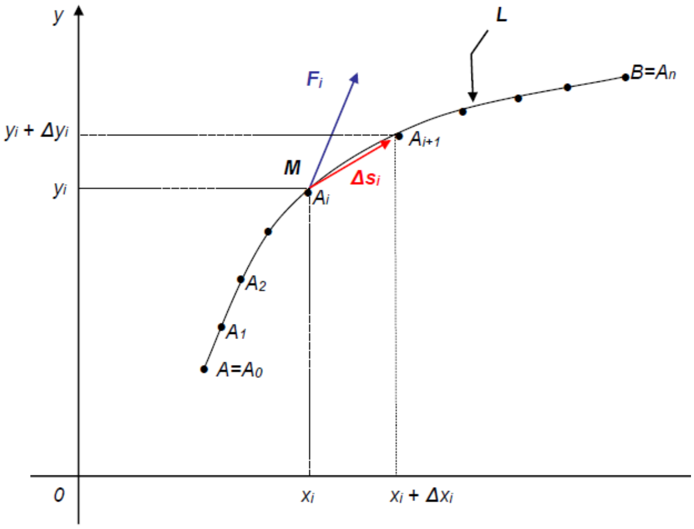


Figura 1

$$\Delta s_i = \Delta x_i i + \Delta y_i j$$

$$T_i \cong F_i \Delta s_i = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Sumando los arcos:

$$T \cong \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

Cuando hacemos los arcos infinitamente más chicos tenemos que:

$$T = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

$$\int_{(A)}^{(B)} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right]$$

A y **B** son las coordenadas de los extremos de la curva **L**.

Cálculo

Para su cálculo simple se realiza una sustitución para reducirla a una integral definida de una variable, según cómo nos den la curva:

- Si la curva L está dada de la forma $y = f(x)$, por lo tanto $dy = f'(x)dx$, realizamos la sustitución:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \{P[x,f(x)] + Q[x,f(x)]f'(x)\}dx$$

- Si la curva L está dada de la forma $x = g(y)$, por lo tanto $dx = g'(y)dy$, realizamos la sustitución:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \{P[g(y),y]g'(y) + Q[g(y),y]\}dy$$

- Si la curva está dada por una función vectorial: $r(t) = [f(t), g(t)] = f(t)i + g(t)j$

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[f(t),g(t)]f'(t) + Q[f(t),g(t)]g'(t)\}dt$$

Ejemplo 4:

Calcular $\int_L ydx + x^2dy$ siendo L el segmento de recta $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 6t \end{cases}$ para $0 \le t \le 1$.

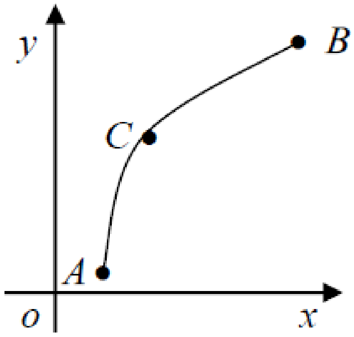
Entonces resulta: $dx = dt$ y $dy = 6.dt$, sustituimos en la integral:

$$\int_L ydx + x^2dy = \int_0^1 6ydt + (t+2)^2 6dt = \int_0^1 (6t^2 + 30t + 24)dt = \left|2t^3 + 15t^2 + 24t\right|_0^1 = 41$$

Propiedades

1. Al cambiar el sentido de integración cambia el signo de la Integral Curvilínea. Pues al invertir el sentido de integración cambia el signo del vector ΔS y por lo tanto cambia el signo de sus proyecciones Δx y Δy.

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = -\int_{(B)}^{(A)} Pdx + Qdy$$



2. Si dividimos a la curva **L** por algún punto intermedio **C** , entonces:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(C)} Pdx + Qdy + \int_{(C)}^{(B)} Pdx + Qdy$$

Lo definido para la Integral Curvilínea es válido también cuando la curva L es cerrada, en estos casos se la suele indicar:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \text{ó} \qquad \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

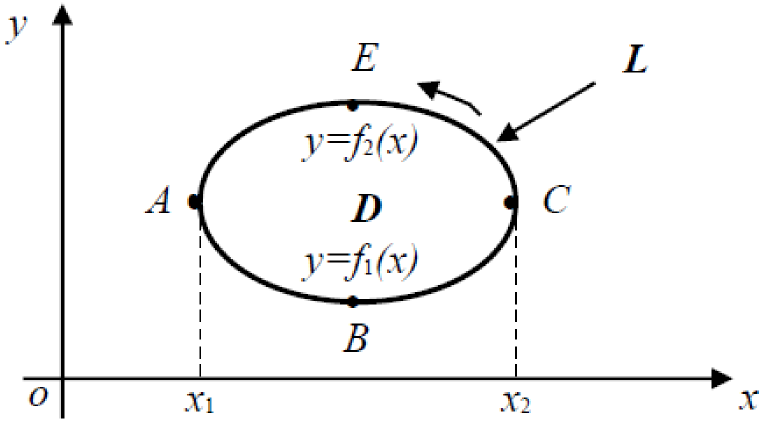
- El origen y el extremo de la curva coinciden, por lo tanto para integrar se debe subdividir la curva y además se debe indicar el sentido de integración.
- Llamaremos sentido positivo al sentido antihorario, y sentido negativo al sentido horario. Cuando no se indique el sentido consideraremos el antihorario.

Cálculo de área

Las integrales curvilíneas se pueden utilizar para calcular áreas.
El área del dominio D es:

$$A = \int_{X_1}^{X_2} f_2(x)dx - \int_{X_1}^{X_2} f_1(x)dx$$

A cada una de estas integrales la podemos considerar como int. curvilíneas:



$$\int_{X_1}^{X_2} f_2(x)dx = \int_{\underline{AEC}} ydx = -\int_{\underline{CEA}} ydx \quad \text{y} \quad \int_{X_1}^{X_2} f_1(x)dx = \int_{\underline{ABC}} ydx$$

Reemplazando, integrando en el sentido antihorario tenemos:

$$A = -[\int_{\underline{CEA}} ydx + \int_{\underline{ABC}} ydx] = -\int_L ydx = \int_L xdy$$

Pero en el uso práctico se suele utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_L (-y)dx + xdy}$$

Teorema de Green

Green relaciona con su teorema a las integrales dobles en un dominio **D** y la integral curvilínea a lo largo de la frontera **L** de dicho dominio. *Referirse al gráfico de la esquina superior derecha de la hoja.*

Sea el dominio **D** y consideremos definidas en él las funciones **P(x,y)** y **Q(x,y)** continuas y sus Derivadas parciales también continuas en ese dominio.
Resolviendo la integral doble:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \left| P(x,y) \right|_{f_1(x)}^{f_2(x)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \{P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)]\} dx$$

$$= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_2(x)] dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_1(x)] dx}_{(b)}$$

- (a) $\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_2(x)] dx = \int_{\overline{AEC}} P(x,y)dx = -\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx$
- (b) $\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_1(x)] dx = \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx$

Reemplazando lo anterior en la integral doble obtenemos que:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\left[\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx + \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx\right]$$

$$\boxed{-\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_L P(x,y)dx}$$

Planteando lo mismo para **Q(x,y)**:

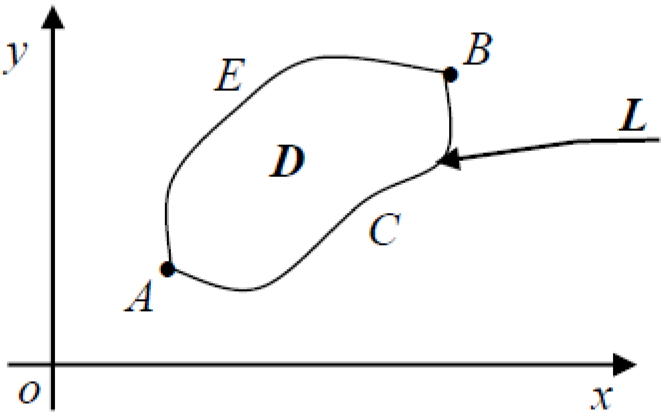
$$\boxed{\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \int_L Q(x,y)dy}$$

Sumando estas dos expresiones tenemos la **Fórmula de Green**

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dxdy$$

Se integró en el sentido antihorario.

Independencia de trayectoria



Establecemos un Dominio D encerrado por dos curvas:
Si nosotros calculamos la integral curvilínea **AEB** y **ACB** Y nos dieran igual, podemos decir que es un **campo conservativo**.
Un **campo conservativo** es aquel donde la integral curvilínea no depende de la trayectoria que tomemos.

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Sean **P(x,y)** y **Q(x,y)** funciones continuas con derivadas continuas en el dominio **D**, considerando que la integral no depende de la trayectoria tenemos:

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy - \int_{\overline{AEB}} Pdx + Qdy = 0$$

Cambiando el sentido de la segunda integral:

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy + \int_{\overline{BEA}} Pdx + Qdy = 0$$

Entonces queda que:

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

Y si utilizamos el **Teorema de Green** tenemos que:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dxdy$$

Por lo que la única condición para que la integral valga 0 es:

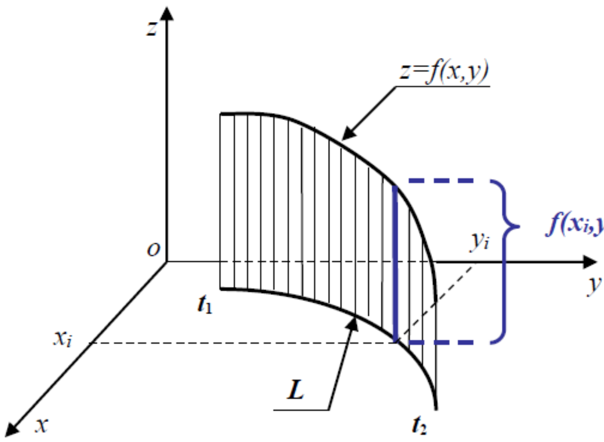
$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Esta es la **condición necesaria y suficiente** para que la **Integral Curvilínea** sea **independiente** de la **Trayectoria de Integración**.

Cálculo en Función escalar

Cuando calculamos una integral curvilínea en una función del tipo **z=f(x,y)** lo que hacemos es calcular el área comprendida entre esa curva y la imagen de la función.
Si la curva L está dada de la forma **y=g(x)** la longitud del diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\ .dx$$



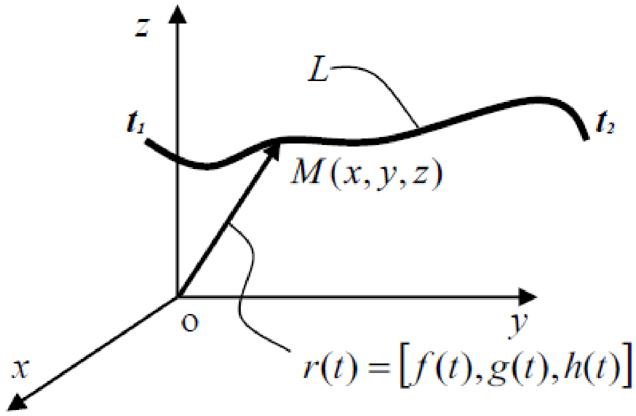
Y la Integral Curvilínea se calcula:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{x_1}^{x_n} f[x, g(x)]\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\ dx$$

También podemos considerar la Integral Curvilínea de la Función **f (x, y, z)** a lo largo de la curva alabeada L

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2}\ dt$$

Integral Curvilínea en el espacio



Sea el campo vectorial:

$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$

y L una curva alabeada dada por una función vectorial:

$$r(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

o en su forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

continua en el intervalo t1,t2

Entonces la integral curvilínea se resuelve:

$$\int_L F(x, y, z)ds = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[f(t), g(t), h(t)]f'(t) + Q[f(t), g(t), h(t)]g'(t) + R[f(t), g(t), h(t)]h'(t)\} dt$$

Función Potencial y Campos conservativos

Si tengo un campo vectorial **F** y puedo demostrar que existe una función **U(x,y)** si se cumple que: **F=grad U**

$$\left.\begin{array}{l} \text{El Campo Vectorial } F \\ \\ \text{Función} \quad u(x, y) \end{array}\right\} \quad \text{si} \quad F = \text{grad}\, u \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F = \text{Campo Vectorial Conservativo} \\ \\ u = \text{Función Potencial} \end{array}\right.$$

Entonces, por definición de gradiente:

$$F = P(x, y)\, i + Q(x, y)\, j = \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos **P** respecto a **y** y **Q** respecto a **x** tenemos que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

*Igualdad con la que anteriormente se estableció que **F**(x,y) es un **Campo Vectorial Conservativo.***

Y de igual manera, haciendo la inversa:

Sí $F = P(x, y)i + Q(x, y)j = grad\ u(x, y)$ **Entonces:** $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du$

Por lo que:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\frac{du}{dx} = P(x,y) \text{ y } \frac{du}{dy} = Q(x,y)$$

Cálculo de función potencial

El cálculo de **U** se hace por ecuaciones diferenciales:

$$P = \frac{du}{dx} \Rightarrow u_{(x,y)} = \ + \varphi_{(y)}$$

Y si derivamos esta expresión respecto a **y**, tenemos **Q**:

$$Q_{(x,y)} = \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx + \frac{d}{dy}\varphi_{(y)}$$

Igualdad que vamos a utilizar para despejar φ

$$\frac{d}{dy}\varphi_{(y)} = Q_{(x,y)} - \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx$$

$$\varphi_{(y)} = \int [Q_{(x,y)} - \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx]dy$$

Ahora reemplazando en la primera ecuación, tenemos **U**

$$u_{(x,y)} = \int P_{(x,y)}dx + \int [Q_{(x,y)} - \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx]dy$$

Operador de Hamilton

Antes de entrar en **integrales de superficie** tenemos que ver unos conceptos:
Definimos a **NABLA** como un operador diferencial de carácter vectorial:

$$\overline{\nabla}: (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$$

*También se conoce como **operador de hamilton***
*y tendrá tantos componentes como variables tenga **F**.*

Gradiente

Este operador se usa cuando calculamos **gradiente**

$$grad\ f\ =\ \overline{\nabla} f = (\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz})$$

*Siendo **f** una función escalar.*

Divergencia

Este operador también se usa cuando calculamos **divergencia** de una función vectorial **F:**

$$div\,\overline{\mathrm{F}} = \ \overline{\nabla} \cdot \overline{\mathrm{F}} = (\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}) \cdot (P, Q, R)$$

$$div\,\overline{\mathrm{F}}\ = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \qquad [Escalar]$$

La divergencia mide, en un punto, si ese punto es **fuente** o **sumidero**.
Según los resultados decimos que:

- **(+)** La función en ese punto es una **fuente** (son más vectores salientes que entrantes)
- **(-)** La función en ese punto es un **sumidero** (son más vectores entrantes que salientes)

Rotor o Rotacional

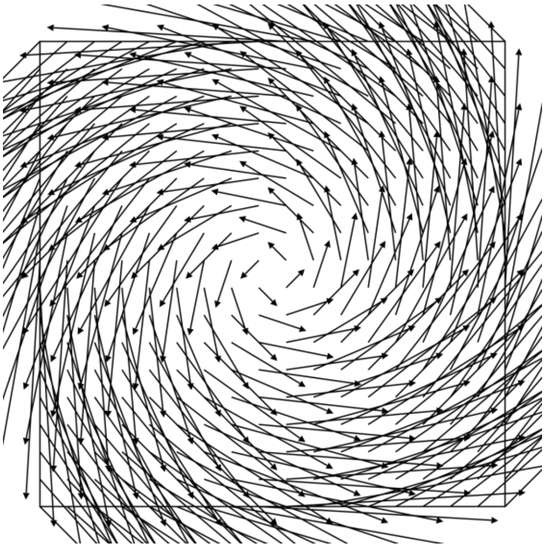
$$rot\,\overline{\mathrm{F}}\ =\ \overline{\nabla} \times \overline{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Resolviendo:

$$rot\,\overline{\mathrm{F}} = (\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz})i + (\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx})j + (\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy})k$$

Con lo anterior podemos definir lo que es un:

Campo Vectorial Irrotacional



Mediante inspección visual, se observa que el campo está girando. Si indicáramos la dirección de un fluido y pusiéramos verticalmente una rueda de palas, de las que se utilizaban en los barcos de vapor, tendería a rotar en el sentido de las agujas del reloj. Utilizando la Regla de la mano derecha el vector rotacional apuntará a la parte negativa del eje zeta (hacia dentro) y no contendrá componentes en el eje x o y.

$$rot\ \overline{\mathrm{F}} = 0 \quad \Rightarrow \overline{\mathrm{F}} = grad\ U$$

$$\mathrm{rot}F = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = \nabla \times \nabla.u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right) i + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) k$$

Y por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden continuas obtenemos:

$$rot\ \overline{\mathrm{F}} = rot(grad\ u)\ = \overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \cdot u) = 0$$

(el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo)

En resumen si $\mathrm{rot}F = 0$ el Campo Vectorial F se llama IRROTACIONAL.

Y todo Campo Vectorial Conservativo es irrotacional.

Campo Vectorial Solenoidal

$$div\ \overline{\mathrm{F}} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \overline{\mathrm{F}} \text{ es un } \textbf{Campo Solenoidal}$$

Demostremos que esto ocurre cuando el Campo Vectorial **F** es el rotor de algún vector (que llamaremos **A**).

$$F = \mathrm{rot}A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) k$$

$$\mathrm{div}F = div(\mathrm{rot}A) = \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y}\right)$$

Y por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden continuas obtenemos:

$$div\ \overline{\mathrm{F}} = div(rot\ A) = \overline{\nabla} \cdot \left(\overline{\nabla} \times A\right) = 0$$

(el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es igual a cero)

Ecuación de Laplace

Dado el Campo Escalar **u(x,y,z)** su Gradiente es:

$$grad\, u \;=\; \overline{\nabla}\, u = \left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)$$

$$div\,(grad\, u) \;= \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} u \;=\; \left(\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

Esta expresión resulta ser muy común y se expresa:

$$\overline{\nabla}.\overline{\nabla} u = \overline{\nabla}^2 u = \Delta u$$

$$\boxed{\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Operador de Laplace.

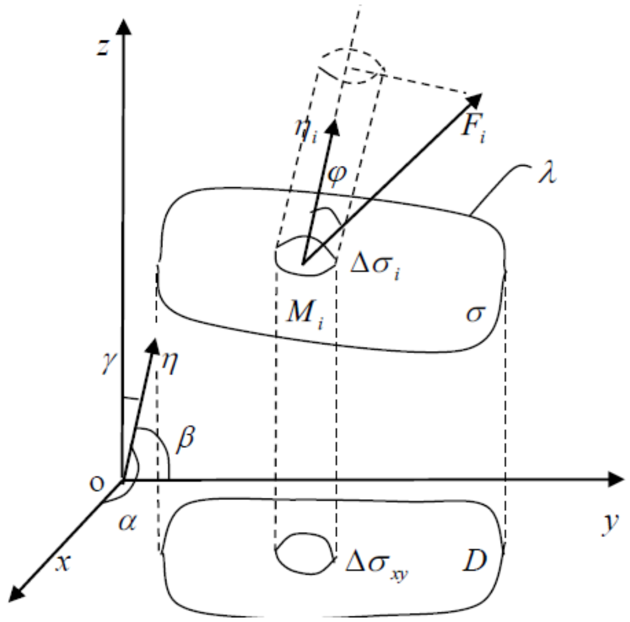
Para el caso particular:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se la denomina **Ecuación de Laplace.**

Cuando una función **u(x,y,z)** satisface esta ecuación se llama **Función Armónica**.

Integrales de superficie



Consideremos en el espacio la superficie σ limitada por la curva cerrada λ. Supongamos que en el punto M la dirección positiva de la normal a la superficie está dada por el versor $\eta(M)$ y que en cada punto está definido el vector:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\eta = \cos\alpha.i + \cos\beta.j + \cos\gamma.k$$

Dividimos la superficie en áreas elementales y tomamos la suma, tendiendo a infinito (superficies infinitamente pequeñas)

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \lim_{\text{máx}\Delta\sigma\to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i.\eta_i.\Delta\sigma_i$$

Siendo "$\text{máx}\Delta\sigma$" el área de la mayor de todas las áreas elementales en que está dividida la superficie "σ".
$F.\eta$ es el producto escalar entre dos vectores, por lo tanto

$$F_i.\eta_i.\Delta\sigma_i = |F_i|.\Delta\sigma_i.\cos\varphi$$

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma}$$

El cálculo de la Integral de Superficie se reduce al cálculo de una integral doble en un dominio plano.
Si determinamos los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\Delta\sigma.\cos\gamma = \Delta\sigma_{xy}$$

$$d\sigma.\cos\gamma = d\sigma_{xy} = dx.dy$$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

Resolviendo la integral:

$$\iint_{\sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,d\sigma$$

$$\iint_{D}\{P[x,y,f(x,y)]\cos\alpha + Q[x,y,f(x,y)]\cos\beta + R[x,y,f(x,y)]\cos\gamma\}\frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$\iint_{D}\left\{-\frac{\partial z}{\partial x}P[x,y,f(x,y)] - \frac{\partial z}{\partial y}Q[x,y,f(x,y)] + R[x,y,f(x,y)]\right\}dxdy$$

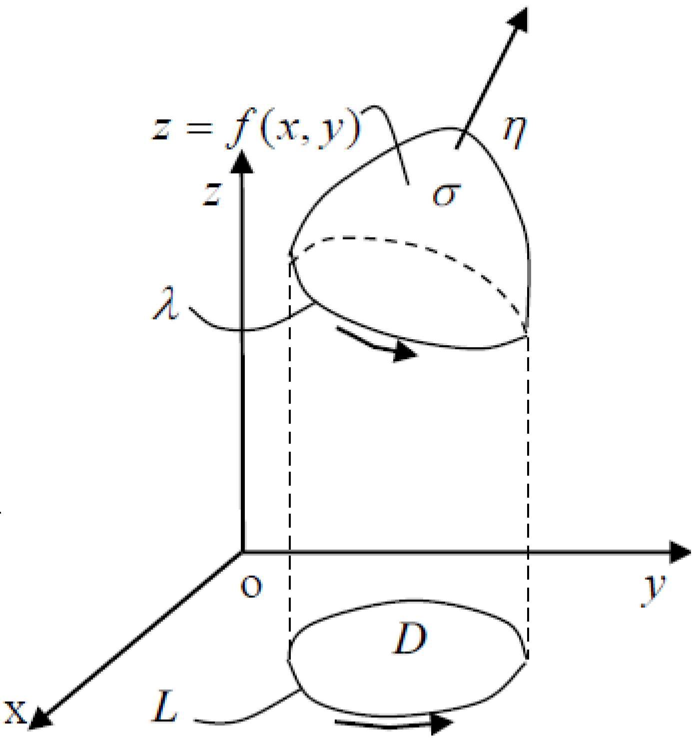
$$\boxed{\iint_{\sigma}F.\eta.d\sigma = \iint_{D}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy}$$ donde P, Q y R están evaluados en $[x,y,f(x,y)]$

Teorema de Stokes

Es frecuentemente utilizado en física.
Consideremos que σes una superficie orientada que está limitada por la curva λy que Fes un campo vectorial que tiene derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a σ.

Este teorema establece la relación entre la **Integral Curvilínea** a lo largo de la curva λy la **Integral de Superficie** sobre la superficie σcuya frontera es la curva λ:

$$\boxed{\iint_{\sigma}\text{rot}F.\eta.d\sigma = \int_{\lambda}F.ds}$$



Ampliando:

$$\boxed{\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma = \int_{\lambda}P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$$

Demostración

Supongamos que σ está dada por la ecuación $z = f(x,y)$ y es tal que toda recta paralela al eje $0z$ que la atraviesa, la corta en un solo punto. Y la proyección de esta superficie sobre el plano $0xy$ es el dominio D.

Consideremos que $z = f(x,y)$ es continua y tiene derivadas de hasta segundo orden también continuas.

Se resuelven las integrales del teorema por separado.
Recordemos que:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy \quad \text{donde } P,Q \text{ y } R \text{ están evaluados en} \left[x,y,f(x,y)\right]$$

Ahora se resuelve la **Integral de superficie**

$$\iint_\sigma \text{rot}F.\eta.d\sigma = \iint_D \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy \qquad \textbf{(1)}$$

donde P,Q y R están evaluados en $\left[x,y,f(x,y)\right]$

Ahora se resuelve la **Integral Curvilínea**

$$\int_\lambda F.ds = \int_\lambda P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

La curva λ está dada por la función $z = f(x,y)$, donde x e y son las coordenadas de los puntos de la curva L que es la proyección de λ sobre el plano $0xy$. Por lo tanto tendremos que:

$$z = f(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\int_\lambda F.ds = \int_L P\left[x,y,f(x,y)\right]dx + Q\left[x,y,f(x,y)\right]dy + R\left[x,y,f(x,y)\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

Reordenando términos y sacando factor común dx y dy obtendremos:

$$\int_\lambda F.ds = \int_L \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

El segundo miembro es una Integral Curvilínea a lo largo de la curva L y las funciones P,Q y R están evaluados en $\left[x,y,f(x,y)\right]$.

Si al segundo miembro la aplicamos el Teorema de Green, obtendremos:

$$\int_\lambda F.ds = \iint_D \left[\frac{\partial\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right]dxdy \qquad \textbf{(2)}$$

Calculamos estas derivadas parciales como funciones compuestas, teniendo en cuenta que P,Q y R son funciones de x,y,z y que $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1}+\frac{\partial Q}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=0}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1}+\frac{\partial R}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=0}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dy}}^{=0}+\frac{\partial P}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dy}}^{=1}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dy}}^{=0}+\frac{\partial R}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dy}}^{=1}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

Al restar estas derivadas en la expresión **(2)** se anulan los dos últimos términos de cada una de ellas y queda:

$$\int_\lambda F.ds=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy$$

Reordenando:

$$\int_\lambda F.ds=\iint_D\left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy \qquad \textbf{(3)}$$

Si comparamos las expresiones **(1)** y **(3)** queda demostrado que:

$$\boxed{\iint_\sigma \mathrm{rot}F.\eta.d\sigma=\int_\lambda F.ds}$$

Fórmula de Green

Si la superficie σ es un plano paralelo al plano $0xy$ resultará $\Delta z = 0$ y obtendremos la **Fórmula de Green** como caso particular de la **Fórmula de Stoke**.

Tal como lo demostramos para el plano, ahora en el espacio, si se cumple que:

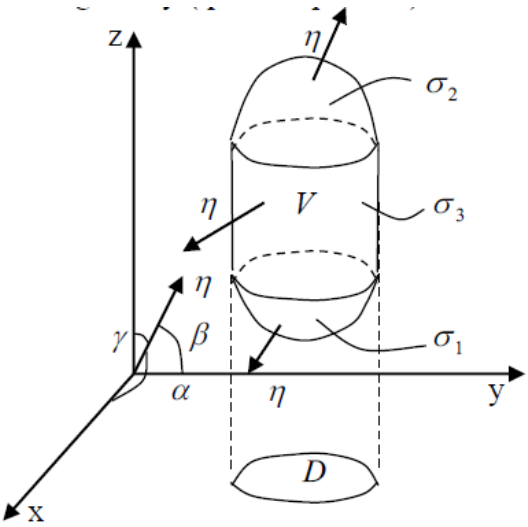
$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Entonces resulta:

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{\lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

y en este caso la **Integral Curvilínea** no depende de la forma de la curva de integración.

Teorema de la Divergencia



Sea V un volumen definido en R^3, limitado por una superficie cerrada σ, que puede ser proyectada sobre los tres planos coordenados. Y sea F un campo vectorial continuo y con derivadas también continuas en una región que contiene a V.

Entonces:

$$\boxed{\iiint_V \text{div}F.dv = \iint_{\sigma} F.\eta.d\sigma}$$

Es decir que la Integral Triple extendida en el dominio V de la Divergencia del campo vectorial F es igual al flujo de F a través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio.

Si F representa la velocidad de un líquido que corre a través del dominio V, la Integral da la cantidad de líquido que sale de V a través de σ en la unidad de tiempo (o que entra si la Integral es negativa).

Si $\text{div}F \equiv 0$, la Integral también será nula o sea que la cantidad de líquido que sale (o entra) a través de σ es igual a cero. O más precisamente la cantidad de líquido que sale es igual a la que entra en el dominio.

Demostración

Recordemos que:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\;k$$

$$\eta = \cos\alpha . i + \cos\beta . j + \cos\gamma . k$$

$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Por lo tanto resulta:

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\; d\sigma}$$

Podemos demostrar separadamente las tres expresiones:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dv = \iint_\sigma P\cos\alpha\; d\sigma \qquad \textbf{(1)}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dv = \iint_\sigma Q\cos\beta\; d\sigma \qquad \textbf{(2)}$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\; d\sigma \qquad \textbf{(3)}$$

Se demostrará (3).

V está limitada por la superficie σ y sea su proyección sobre el plano $0xy$ el dominio D.

Consideremos que se puede dividir σ en σ_1, σ_2 y σ_3.

σ_1 está dado por $z = f_1(x,y)$, σ_2 por $z = f_2(x,y)$, y σ_3 es una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje $0z$.

Resolvamos la integral del primer miembro de la igualdad **(3)**:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dz \right] dxdy = \iint_D \{ R[x,y,f_2(x,y)] - R[x,y,f_1(x,y)] \}\, dxdy$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D R[x,y,f_2(x,y)]\, dxdy - \iint_D R[x,y,f_1(x,y)]\, dxdy \qquad \textbf{(4)}$$

Resolvamos ahora la integral del segundo miembro de la igualdad **(3)**:

$$\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$

Si consideramos las normales exteriores a la superficie σ resulta:

$$\begin{aligned} &\cos\gamma < 0 \quad \text{en} \quad \sigma_1 \\ &\cos\gamma > 0 \quad \text{en} \quad \sigma_2 \\ &\cos\gamma = 0 \quad \text{en} \quad \sigma_3 \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$\cos\gamma.\Delta\sigma = \Delta\sigma_{xy} \qquad \text{ó}$$

$$\cos\gamma.d\sigma = dx\,dy$$

$$\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = -\iint_{D} R[x,y,f_1(x,y)]\,dxdy + \iint_{D} R[x,y,f_2(x,y)]\,dxdy + 0$$

$$\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{D} R[x,y,f_2(x,y)]\,dxdy - \iint_{D} R[x,y,f_1(x,y)]\,dxdy \qquad \textbf{(5)}$$

Si comparamos las expresiones **(4)** y **(5)** podemos comprobar que queda demostrada la igualdad **(3)**.

De modo similar se pueden demostrar las igualdades **(1)** y **(2)**, con lo que finalmente queda demostrado el **Teorema de la Divergencia.**

Ecuaciones Diferenciales

Recibe el nombre de Ecuación Diferencial toda ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas $y', y'', \ldots\ldots, y^{[n]}$.

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots y^{[n]}) = 0$$

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Definiciones

- Si la función buscada es de **una sola variable independiente**, como la indicada precedentemente es una **Ecuación Diferencial Ordinaria.**
- Si la función buscada es de **dos o más variables independientes**, se llama **Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales**.
- El **Orden** de una Ecuación Diferencial es el de la derivada superior que interviene en la ecuación.
- El **Grado** de una Ecuación Diferencial está dado por el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden.
- Se llama Solución o Integral de la Ecuación Diferencial a toda función **y = f (x)** que introducida en la ecuación, la transforma en una identidad. Si la Solución está dada en forma implícita, $\varphi(x, y) = 0$, generalmente se llama Integral.

EDO - Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Tienen la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

Solución General

Se llama **Solución General** de una Ecuación Diferencial de Primer Orden a la función:

$$y = F(x, C)$$

También son admisibles las soluciones:

$$C = F(x, y) \text{ y } x = F(C, y)$$

Solución Particular

Si se fija una Condición Inicial $y = y_0 \; para \; x = x_0$ Se puede encontrar un valor de $C = C_0$tal que la función $y = F(x, C_0)$satisfaga la Condición Inicial dada. Esta se llama **Solución Particular**

Desde el punto de vista geométrico, la **Solución General representa una familia de curvas** en el plano de coordenadas. Estas curvas **se llaman Curvas Integrales** de la Ecuación Diferencial dada. Cada Solución Particular está representada por una curva de esta familia.

A variables separables

Son las ecuaciones diferenciales más sencillas, son aquellas que se pueden reformar para expresarse de la forma:

$$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$$

Dando lugar a una solución sencilla donde solamente integramos ambos miembros.

$$\boxed{\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0}$$

Ejemplo:

Sea la Ecuación Diferencial: $x + yy' = 0$

Es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, pues la podemos expresar así:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad xdx + ydy = 0$$

Integramos y obtenemos la Solución General:

$$\int xdx + \int ydy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

Dada la forma del primer miembro, el segundo siempre será positivo, y podemos considerar:

$$2.C_1 = C^2$$

Con lo que resultará:

$$\boxed{x^2 + y^2 = C^2} \qquad \textbf{Solución General}$$

Corresponde a una familia de circunferencias concéntricas e radio C y centro en el origen de coordenadas.

Fijando una Condición Inicial, por ejemplo $y(4) = 3$, podemos obtener la Solución Particular correspondiente:

$$4^2 + 3^2 = C_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 5$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25} \qquad \textbf{Solución Particular}$$

Esta Solución Particular corresponde a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas de radio igual a 5.

Homogéneas

Una ecuación diferencial de primer orden será homogénea si las variables "tienen la misma variabilidad en la función".
Esto se comprueba de la siguiente manera:

1. Expresamos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

2. Si podemos comprobar la igualdad:

$$f(x, y) \ = \ f(\lambda . x, \lambda . y)$$

   (Es decir, podemos cancelar todas las ocurrencias de λ en la ecuación)

Entonces será una **EDO - Homogénea.**
Para que se dé la condición, los grados de las variables **x** e **y** deben ser iguales, sino no se podrá cancelar λ.

Caso particular:

Cuando **f(x,y)** nos queda de la siguiente manera (ejemplo):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

No vamos a poder cancelar λ sin antes aplicar una **transformación**.
Lo que hacemos es básicamente definir dos variables nuevas:

$$x = x_1 + m \qquad \Rightarrow \quad dx \ = \ dx_1$$
$$y = y_1 + n \qquad \Rightarrow \quad dy \ = \ dy_1$$

Con esto definido, reemplazamos en la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1} = \frac{(x_1 \ + \ m) \ + \ (y_1 + n) \ - \ 3}{(x_1 \ + \ m) \ - \ (y_1 + n) \ - \ 1}$$

Entonces, lo que buscamos es un valor para **m y n** de tal manera que los términos independientes se quedan cancelados, esto lo hacemos planteando un sistema de ecuación de dos (o más) incógnitas.

$$m + n = 3$$
$$m - n = 1$$

Despejamos **m** y **n**

$$m = 2 \quad , \quad n = 1$$

Y reemplazamos en la función. Nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} = \frac{\lambda x_1 + \lambda y_1}{\lambda x_1 - \lambda y_1}$$

Lo que queda es resolver normalmente y al final reemplazar por las variables originales.

Lineales

Las **EDO** Lineales tienen / las podemos llevar a la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Para resolver esta ecuación vamos a hacer una transformación:

$$y = u(x)\,.\,v(x) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.v + u.\frac{dv}{dx} = y' = u'.v + u.v'$$

Sustituimos en la ecuación original:

$$u'.v + u.v' + P(x)u.v = Q(x)$$

Hacemos factor común **u** en el primer miembro:

$$u'.v + u[v' + P(x).v] = Q(x) \qquad (1)$$

Por conveniencia, igualamos la expresión dentro de los corchetes a 0 para despejar **v**:

$$v' + P(x).v = 0 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{dv}{dx} = -P(x).v$$

$$\int \frac{1}{v} dv = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\int P(x)dx$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

Con **v** despejado, volvemos a la ecuación **(1)** y reemplazamos. El segundo miembro será igual a 0 ya que fue la condición que establecimos anteriormente para despejar **v**.

$$u'.e^{-\int P(x)dx} + u[v' + P(x).v] = Q(x)$$

$$u'.e^{-\int P(x)dx} + 0 = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = e^{\int P(x)dx}.Q(x) \quad \Rightarrow \quad u = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C$$

*(Nótese que solo cuando despejamos **u** tenemos en cuenta la **constante de integración**)*

Ahora que tenemos **u** y **v** despejados, volvemos atrás con la transformación para despejar y:

$$y = u.v = e^{-\int P(x)dx}\,.\left[\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\,dx + C\right]$$

Y así tenemos resuelta la ecuación.

Bernoulli

Bernoulli es un caso especial para transformar una ecuación diferencial donde **y sea de un grado diferente de 1 o 0**, para transformarla en una simple **EDO Lineal.**
Tienen la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

Primero vamos a multiplicar toda la ecuación por el siguiente factor: $(1-n)\, y^{-n}$

$$(1-n)\, y^{-n} \,.\frac{dy}{dx} + P(x)\, y \,.(1-n)\, y^{-n} = Q(x)\, y^n \,.(1-n)\, y^{-n}$$

$$(1-n)\, y^{-n} \,.\frac{dy}{dx} + (1-n).P(x).y^{1-n} = (1-n).Q(x)$$

Ahora vamos a hacer un cambio de variable, segun la expresion: $z = y^{1-n}$

$$(1-n)\, y^{-n} \,.\frac{dy}{dx} + (1-n).P(x).z = (1-n).Q(x)$$

Derivando la expresión $z = y^{1-n}$ nos queda: $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}.\frac{dy}{dx}$ que usaremos para reemplazarla en el primer miembro, y nos queda:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n).P(x).z = (1-n).Q(x)$$

Y si establecemos:

$$P_1(x) \;=\; (1-n).P(x) \qquad y \qquad Q_1(x) \;=\; (1-n).Q(x)$$

Tenemos:

$$\frac{dz}{dx} + P_1(x).z = Q_1(x)$$

Que finalmente tiene forma de **EDO - Lineal**, que resolveremos con su procedimiento y luego reemplazamos x por y según la expresión: $z = y^{1-n}$

$$z = y^{1-n} = u.v = e^{-\int P_1(x)dx} \,.\left[\int e^{\int P_1(x)dx}.Q_1(x)\; dx + C\right]$$

Algo comúnmente realizado en este tipo de **EDO** es pasar el exponente de **y** para el otro lado de la igualdad, aunque no es estrictamente necesario.

Totales o Exactas

Las **EDO** Exactas o Totales tienen la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Donde verifican la siguiente igualdad:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

Esta es la condición para que la ED sea Total o Exacta.

Si tomamos que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es el diferencial de una función u:

$$du_{(x,y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{(x,y)} = C$$

Siendo esta última la solución General.

El cálculo de **U** se hace de la manera siguiente:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

$$P = \frac{du}{dx} \Rightarrow u_{(x,y)} = \int P_{(x,y)}dx \ + \ \varphi_{(y)}$$

Y si derivamos esta expresión respecto a **y**, tenemos **Q**:

$$Q_{(x,y)} = \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx \ + \frac{d}{dy}\varphi_{(y)}$$

Igualdad que vamos a utilizar para despejar φ

$$\frac{d}{dy}\varphi_{(y)} = Q_{(x,y)} - \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx$$

$$\varphi_{(y)} = \int [Q_{(x,y)} - \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx\ ]dy$$

Ahora reemplazando en la primera ecuación, tenemos **U**

$$u_{(x,y)} = \int P_{(x,y)}dx \ + \int [Q_{(x,y)} - \frac{d}{dy}\int P_{(x,y)}dx\ ]dy$$

Y acomodamos la expresión para que quede de la sig. forma, dando la **Solución General**.

$$u_{(x,y)} = C$$

Soluciones Singulares

Es una solución de la **ED** pero que no sale de la solución general (no se deducen dándoles valores a las Constantes Arbitrarias de las Soluciones Generales)

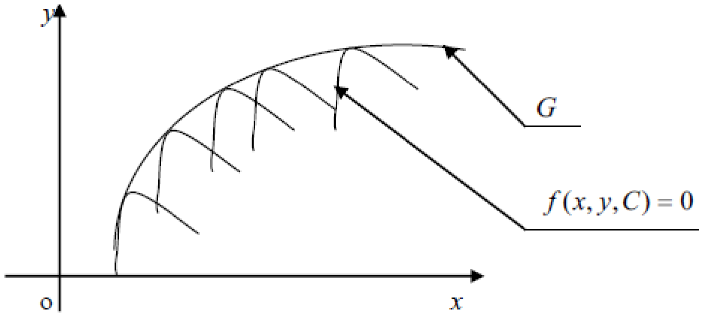
Considerando la **ED**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Las soluciones generales serán del tipo:

$$f(x, y, C) = 0$$

Son familias de curvas.



A la curva **G** la llamamos **envolvente** ya que es tangente a todas las soluciones generales de la ecuación.

Esta envolvente **no se puede calcular** como una solución general., sino que se debe calcular planteando el sistema de ecuaciones:

$$f(x, y, C) = 0$$
$$\frac{df}{dC} = 0$$

Ejemplo:

Hallar la Solución Singular de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$y^2 + y^2(y')^2 = 4 \qquad (1)$$

Primero determinamos la Solución General. Es una Ecuación Diferencial con Variables Separables. Separamos las variables:

$$y^2(y')^2 = 4 - y^2$$

$$(y')^2 = \frac{4-y^2}{y^2}$$

$$y' = \frac{\pm\sqrt{4-y^2}}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{4-y^2}}{y}$$

$$\frac{y}{\pm\sqrt{4-y^2}} \cdot dy = dx$$

Integramos: $\pm\sqrt{4-y^2} + C = x$ y reordenando términos obtenemos:

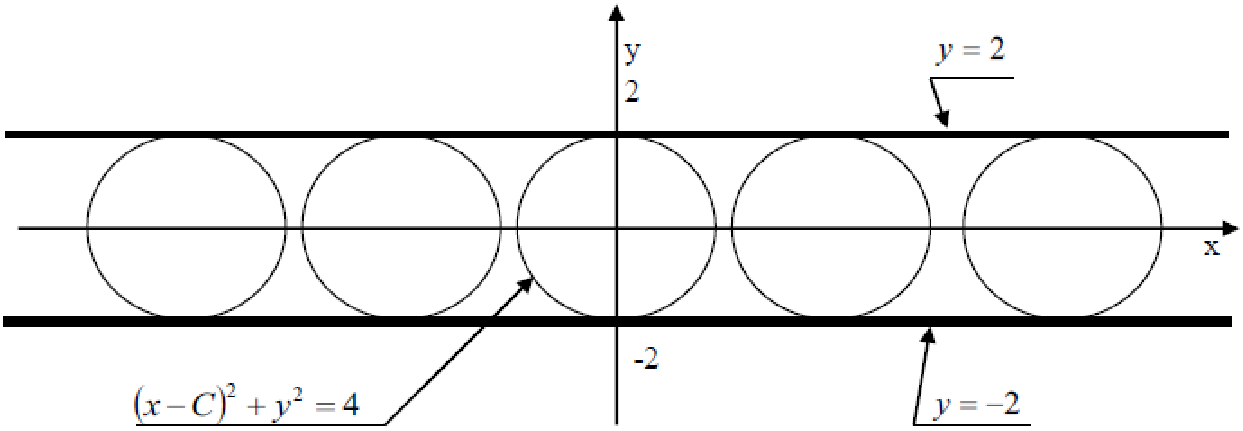
$$\boxed{(x-C)^2 + y^2 = 4} \qquad \text{Solución General} \qquad (2)$$

Esta Solución General es una familia de circunferencias de radio $R = 2$ y centro sobre el eje de las abscisas.

$$\begin{cases} f(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = 4 \\ -2x + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \pm 2$$

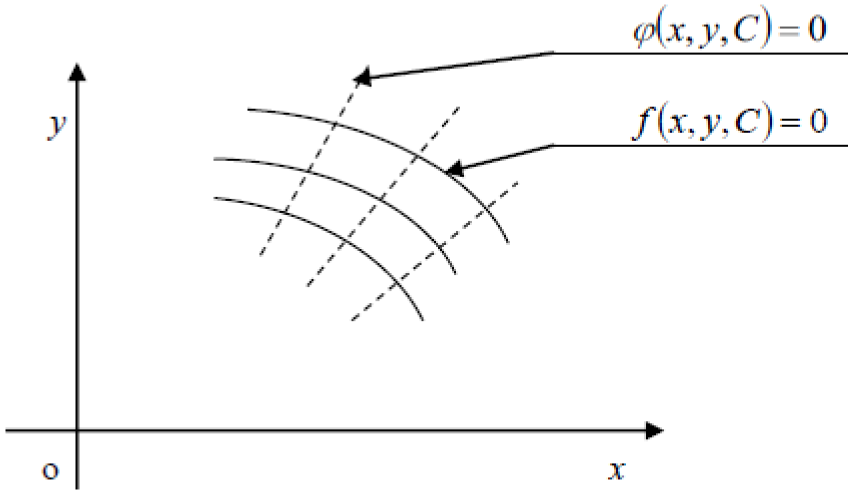
Que son dos rectas envolventes a la familia de circunferencias y como satisfacen a la Ecuación Diferencial (1) son Soluciones Singulares.

$\boxed{y=2}$ e $\boxed{y=-2}$ **Soluciones Singulares**



Trayectorias Ortogonales

A Veces no nos interesa conocer la familia de curvas, sino líneas que cortan a las curvas de esta familia, formando un ángulo recto. Estas se llaman **Trayectorias Ortogonales**.



En el gráfico las curvas de trazo continuo se obtienen dando valores a la constante **C** de la función

Considerando la **ED**:

$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ cuyas soluciones generales serán del tipo: $f(x,y,C)=0$

Transformar la ec diferencial:

$$F(x,y,-\frac{dx}{dy})=0$$

Al hacer el recíproco inverso vamos a tener la pendiente ortogonal

Esta última **ED** será la **Ecuación Diferencial de las Trayectorias Ortogonales** cuya solución es:

$$\varphi(x,y,C)=0$$

Ejemplo:

Determinar las Trayectorias Ortogonales de la familia de circunferencias concéntricas:

$$x^2 + y^2 = C^2 \qquad (1)$$

Para obtener la Ecuación Diferencial de esta familia de curvas, derivemos:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

La Ecuación Diferencial de la familia de curvas ortogonales es:

$$2x - 2y \cdot \frac{dx}{dy} = 0 \qquad (4)$$

Obtengamos ahora la Solución General de esta Ecuación Diferencial. Es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables. Separemos las variables:

$$2x = 2y \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integramos: $\ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln Cx$

Y finalmente la familia de Trayectorias Ortogonales finalmente resulta:

$$\boxed{y = Cx} \qquad (5)$$

EDS - Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Tienen la forma:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{[n]}) = 0$$

Solución General

Se llama **Solución General** de una Ecuación Diferencial de Primer Orden a la función:

$$F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$$

También son admisibles las soluciones:

$$y = F(x, C_1, C_2, ..., C_n) \text{ y } x = F(y, C_1, C_2, ..., C_n)$$

Si se dan condiciones iniciales se puede obtener la **Solución Particula**r correspondiente.
Recordar que el **grado** es el exponente de la **derivada de mayor orden**.

*En esta materia se tratan hasta **EDS** de 2do orden, y con coef. constantes.*

Lineales Homogénea de 2do orden

Si $f(x) \neq 0$ la Ecuación Diferencial Lineal se llama **no Homogénea** ó con segundo miembro.

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \dots\dots\dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

Si $f(x) = 0$ la Ecuación Diferencial Lineal se llama **Homogénea** ó sin segundo miembro.

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \dots\dots\dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

Ahora veremos de segundo orden.

Tienen la forma:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Esta tendrá dos soluciones:

$$y_1 \wedge y_2$$

Se cumplirá la ecuación al reemplazar por estas soluciones.

La solución general de la homogénea será:

$$y_{GH} = y_1 + y_2 \quad \text{y también es válido} \quad y_{GH} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Que también cumplirá la ecuación:

$$(y_1'' + y_2'') + a_1(y_1' + y_2') + a_2(y_1 + y_2) = 0$$

$$[y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1] + [y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2] = 0$$

Debido a que lo que está dentro de cada corchete, valdrá 0.

Veremos que multiplicar a una solución por una constante, también dará una solución. Entonces, la solución general será:

$$y_{GH} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Algo a tener en cuenta: **Las soluciones deben ser Linealmente Independientes** y esto se demuestra:

$$\frac{y_1}{y_2} \neq cte \text{ ó } \backslash x / = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Siendo este el **determinante Wronskiano**

Si la ecuación es del tipo:

$$y'' + py' + qy = 0$$ Siendo p y q dos constantes

La solución es sencilla, y de la siguiente manera:

$$y = e^{kx} \quad \rightarrow \quad y' = ke^{kx} \quad \rightarrow \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

Entonces reemplazando la función y:

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{kx}[k^2 + pk + q] = 0$$

Y como lo del corchete tiene que ser 0, lo llamamos la **Ecuación Característica:**

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Y de esta expresión tendremos 3 casos posibles, en base al signo de: $p^2 - 4q$

1. Valores para **k** distintos ($p^2 - 4q > 0$)

$$y_G = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Solución General

2. Valores para **k** iguales ($p^2 - 4q = 0$)

$$k_1 = k_2 = k = \frac{-p}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2k + p = 0$$

Aquí surge un problema, porque la solución general: $y_G = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx}$ sería **linealmente dependiente**. Para este caso en particular vamos a multiplicar la segunda solución por **x**, ya que las soluciones pasarían a ser **linealmente independientes** y al reemplazar en la **ED** se comprueba la igualdad.

$$y_G = C_1 e^{kx} + C_2\, x e^{kx}$$

Solución General

3. Valores para **k** complejos conjugados($p^2 - 4q < 0$)
   $k_1 = \alpha + \beta i \;\; ; \;\; k_2 = \alpha - \beta i$

$$y_G = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2\, e^{(\alpha-\beta i)x}$$

Solución General (1) (no final)

Usaremos la Identidad de Euler para simplificar la solución:

$$e^{\pm ix} = cos(x) \pm i\; sen(x)$$

Simplificando La **Solución General (1)** y luego reemplazando por la identidad:

$$y_G = C_1 e^{\alpha x} e^{\beta x i} + C_2 e^{\alpha x} e^{-\beta x i} \quad = \quad e^{\alpha x}[C_1 e^{\beta x i} + C_2 e^{-\beta x i}]$$

$$y_G = e^{\alpha x}[C_1\{cos(\beta x) + i\; sen(\beta x)\} + C_2\{cos(\beta x) - i\; sen(\beta x)\}]$$

$$y_G = e^{\alpha x}[cos(\beta x)\{C_1 + C_2\} + sen(\beta x)\{C_1 i - C_2 i\}]$$

Reemplazamos las sumas de las constantes, por otras constantes, y nos queda:

$$y_G = e^{\alpha x}[cos(\beta x)\{A\} + sen(\beta x)\{B\}]$$

$$y_G = e^{\alpha x}[A\; cos(\beta x) + B\; sen(\beta x)]$$

Solución General

Solución Particular:

Si nos piden la solución particular, esta se suele dar de la siguiente manera, con un sistema comprendido por:

$$y_{(0)} = a = cte \qquad (1)$$

$$y'_{(0)} = b = cte \qquad (2)$$

Con **(1)** se calcula la constante **C1**.
Derivando la **Solución General**, reemplazo con **(2)** y se obtiene la constante **C2**.

HALLAR SOL. PART. DE: A COEF. CONSTANTES y HOMOGÉNEAS

$y'' + 10y' + 25y = 0$ PARA $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$1 = C_1 e^{-5.0} + \cancel{C_2\, 0\, e^{-5.0}}$

$\boxed{1 = C_1}$

$k^2 + 10k + 25 = 0$

$\dfrac{-10 \pm \sqrt{\cancel{100 - 100}}}{2} = -5, \; -5$ 2RRI

$\boxed{y_G = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}}$

$y' = -5C_1 e^{-5x} + C_2[e^{-5x} + \underbrace{x(-5)e^{-5x}}_{=0}]$

$y'(0) = \boxed{2 = -5C_1 + C_2}$

$2 = -5.1 + C_2$

$\boxed{7 = C_2}$

Lineales No-Homogéneas de 2do orden

Cuando tiene la forma:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Lo que vamos a realizar, es buscar la **Solución General Homogénea** y sumarle una "**Solución Particular, o, Solución General No-Homogénea**"

$$y_G = y_{GH} + y_{GNH} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{GNH}$$

Para obtener y_{GNH} se utilizarán dos métodos:

- **Coeficientes Indeterminados.**
  Este método es más sencillo, pero restringido a ciertos tipos de funciones.
- **Variación de Parámetros.**
  *Este método es más complejo, pero **general**. (para cualquier tipo de función)*

Método de los Coeficientes Indeterminados

Polinomios

Si la función del segundo miembro que tengo es un **Polinomio** de grado **n**:

$$f(x) = P_n(x)$$

Proponemos como **Solución General No-Homogénea** a otro polinomio de grado **n** con coeficientes que se tendrán que determinar:

$$y_{GNH} = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ \ldots\ + A_{n-1} x + A_n$$

Calcularemos los coeficientes:

$$A_0, A_1, A_{n-1}, A_n$$

Ahora vamos a tratarlo con ejemplo de P de grado 2.

$$f(x) = P_2(x) = Dx^2 + Ex + F$$

Primero, derivamos nuestra solución propuesta y_{GNH} **n=2** veces:

$$y_{GNH} = Ax^2 + Bx + C$$
$$y'_{GNH} = 2Ax + B$$
$$y''_{GNH} = 2A$$

Reemplazamos la solución en nuestra **ED**:

$$y'' + \qquad ay' + \qquad by \qquad = Dx^2 + Ex + F$$
$$[2A] + a[2Ax + B] + b[Ax^2 + Bx + C] = Dx^2 + Ex + F$$

Y ahora tendremos que igualar los términos de cada grado del polinomio, con los del otro lado.

$$para\ x^2\!:\ D = b.A$$
$$para\ x^1\!:\ E = 2.a.A + b.B$$
$$para\ x^0\!:\ F = 2.A + a.B + b.C$$

Despejamos $A, B\ y\ C$ y tendremos nuestra solución y_{GNH} .

Caso Particular:

Si mi ecuación tiene la forma:

$$y'' + ay' = f(x) = P_n(x)$$

Vemos que falta el término sin derivar, entonces lo que hacemos cuando planteamos nuestro polinomio para resolver es:

$$y_{GNH} = [P_n(x)].x \quad \textbf{(1)}$$
$$y'_{GNH} = \ldots$$
$$y''_{GNH} = \ldots$$

y veremos que cuando reemplazamos estos valores en la ecuación para buscar los coeficientes, el primero **(1)** se va a eliminar.

Función Exponencial

Si la función del segundo miembro que tengo es una **función exponencial**:

$$f(x) = Ce^{\alpha x} \qquad \Leftrightarrow \qquad C, \alpha = cte$$

En nuestra **Solución General No-Homogénea** dejaremos intacta a α:

$$y_{GNH} = Ae^{\alpha x}$$

Solo debemos determinar el coeficiente A

Primero, derivamos nuestra solución propuesta y_{GNH} **n=2** veces:

$$y_{GNH} = Ae^{\alpha x}$$
$$y'_{GNH} = \alpha.A.e^{\alpha x}$$
$$y''_{GNH} = \alpha^2.A.e^{\alpha x}$$

Reemplazamos la solución en nuestra **ED**:

$$y'' + \qquad ay' + \qquad by \qquad = Ce^{\alpha x}$$
$$[\alpha^2.A.e^{\alpha x}] + a[\alpha.A.e^{\alpha x}] + b[Ae^{\alpha x}] = Ce^{\alpha x}$$

Quitamos $e^{\alpha x}$ de todos los términos:

$$\alpha^2.A + a.\alpha.A + b.A = C$$
$$A.[\alpha^2 + a.\alpha + b] = C$$
$$A = \frac{C}{\alpha^2 + a.\alpha + b}$$

Y nuestra solución general tendrá la forma similar a (puede variar según la **ED**):

$$y_G = y_{GH} + y_{GNH} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \frac{C}{\alpha^2 + a.\alpha + b}e^{\alpha x}$$

Caso Particular 1:

Si nuestra solución fuera linealmente dependiente, es decir, se cumple que:

$$\alpha = k_1 \ \ o\ también \ \ \alpha = k_2$$

Entonces, la solución que se propone, es la siguiente (igual a la anterior multiplicada por X):

$$y_{GNH} = Ae^{\alpha x}.x$$

Derivando…

$$y'_{GNH} = A.[\alpha.e^{\alpha x}.x + e^{\alpha x}] \quad = \quad A.e^{\alpha x}.[\alpha.x + 1]$$

$$y''_{GNH} = A.[\alpha^2.e^{\alpha x}.x + 2.\alpha.e^{\alpha x}] \ = \ A.e^{\alpha x}.[\alpha^2.x + 2.\alpha]$$

Reemplazando en la **ED**:

$$y'' + \qquad ay' + \qquad by \quad = Ce^{\alpha x}$$

$$A.[\alpha^2.e^{\alpha x}.x + 2.\alpha.e^{\alpha x}] \ + a\{A.[\alpha.e^{\alpha x}.x + e^{\alpha x}]\} + b[Ae^{\alpha x}.x] = Ce^{\alpha x}$$

Ahora agrupamos los términos que tienen $e^{\alpha x}.x$ y los que tienen $e^{\alpha x}$

Se comprueba:

$$A.\alpha^2 + a.A.\alpha + b \ = \ 0$$

Debido a que no hay término $e^{\alpha x}.x$ *en el 2 miembro.* ($= 0.e^{\alpha x}.x \ + \ Ce^{\alpha x}$)

Y calculamos A:

$$A.2.\alpha + a.A \ = \ C \quad \Rightarrow A = \frac{C}{2\alpha + a}$$

Caso Particular 2:

Similar al anterior, si tenemos que la solución como lo siguiente:

$$y_G = [y_{GH}] \ + \ y_{GNH} = [C_1e^{k_1x} + C_2.x.e^{k_2x}] + A.x.e^{\alpha x}$$

Esta solución va a ser inválida, ya que es **Linealmente Dependiente.**

Entonces lo que se hace, es proponer una **Solución General No-Homogénea** del tipo:

$$y_{GNH} = Ae^{\alpha x}.x^2$$

Y se resolverá de manera similar a lo anterior.

Seno/Coseno

Si la función del segundo miembro que tengo es una **función con seno/coseno**:

$$f(x) = C.cos(\beta x) + D.sen(\beta x) \quad \Leftrightarrow \quad C, D, \beta \ = \ cte$$

Tener en cuenta que **C, o D** pueden ser 0.

Lo que vamos a hacer es proponer una **Solución General No-Homogénea** del mismo tipo, y derivo:

$$y_{GNH} = A.cos(\beta x) + B.sen(\beta x)$$
$$y'_{GNH} = -\beta.A.sen(\beta x) + \beta.B.cos(\beta x)$$
$$y''_{GNH} = -\beta^2.A.cos(\beta x) - \beta^2.B.sen(\beta x)$$

Reemplazando en la **ED**:

$$y'' + ay' + by = C.cos(\beta x) + D.sen(\beta x)$$
$$-\beta^2.A.cos(\beta x) - \beta^2.B.sen(\beta x) + a[-\beta.A.sen(\beta x) + \beta.B.cos(\beta x)]$$
$$+b[A.cos(\beta x) + B.sen(\beta x] = C.cos(\beta x) + D.sen(\beta x)$$

Agrupamos todo aquello que multiplique a **sen** y **cos**…

$$cos(\beta x).[-\beta^2.A + a.\beta.B + b.A] \ = cos(\beta x).C$$
$$-\beta^2.A + a.\beta.B + b.A = C$$
$$sen(\beta x).[-\beta^2.B - a.\beta.A + b.B] \ = sen(\beta x).D$$
$$-\beta^2.B - a.\beta.A + b.B = D$$

Quedará un sistema de dos ecuaciones:

$$[b - \beta^2].A \ + \ [a.\beta].B = C$$
$$[-a.\beta].A + \ [b - \beta^2].B = D$$

Resolviendo el sistema tendremos la solución.

Caso Particular:

Cuando la **Solución General Homogénea** es compleja, del tipo:

$$y_G = e^{\alpha x}[A \ cos(\beta x) + B \ sen(\beta x)]$$

Tenemos que revisar que la solución no sea **linealmente dependiente**.

En ese caso, tendremos que multiplicar el factor que molesta por **x**.

Combinación Suma

Si tenemos que el segundo miembro de la **ED** es una suma de funciones de los tipos anteriores:
Ejemplo:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$
$$y'' + 5y' + 6y = x - 3 + 2e^{4x}$$

Proponemos como **Solución General No-Homogénea** a una función igual, con coef indeterminados:

$$y_{GNH} = A.x + B + C.e^{4x}$$

Y dividimos la parte del polinomio, y la parte exponencial y buscamos los coeficientes por separado.

Ejemplo 1:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' + 4y' + 4y = 2e^{4x} - 5\operatorname{sen} 2x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ae^{4x} + B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x$

Ejemplo 2:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - y = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{-2x}$

Ejemplo 3:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 3x + 5 + 2\cos x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ax + B + C\cos x + D\operatorname{sen} x$

Combinación Producto

Se propone una Solución Particular y_p con la forma de un producto de funciones del mismo tipo.

Ejemplo 1:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$
Se propone una Solución Particular: $y_p = (Ax + B)e^{2x}$

Ejemplo 2:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - y = 2x\cos 5x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = (Ax + B)\cos 5x + (Cx + D)\operatorname{sen} 5x$

Ejemplo 3:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 4e^{3x}\operatorname{sen} 2x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ae^{3x}\cos 2x + Be^{3x}\operatorname{sen} 2x$

Variación de Parámetros

La **ED** tiene la forma:

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Lo que vamos a realizar, es buscar la **Solución General Homogénea** y sumarle una "**Solución Particular, o, Solución General No-Homogénea**"

$$y_G = y_{GH} + y_{GNH} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{GNH}$$

Nuestra **Solución General No-Homogénea** tendrá la misma forma que la **Solución General Homogénea,** pero suponemos que las constantes van a ser **funciones de x**

$$y_{GNH} = u_{(x)}.\, y_1 + v_{(x)}.\, y_2$$

Derivamos…

$$y'_{GNH} = u'_{(x)}.\, y_1 + u_{(x)}.\, y'_1 + v'_{(x)}.\, y_2 + v_{(x)}.\, y'_2$$

Ya que si derivamos de nuevo se complicaría mucho la expresión, proponemos una condición:

$$y'_{GNH} = \left[u'_{(x)}.\, y_1 + v'_{(x)}.\, y_2\right] + \left[u_{(x)}.\, y'_1 + v_{(x)}.\, y'_2\right] \qquad (1)$$

Nuestra condición consiste en que lo que se encuentre dentro de los corchetes sea igual a 0.
Ya que impusimos esa condición (que se verá más adelante), procedemos con la segunda derivada:

$$y''_{GNH} = u'_{(x)}.\, y'_1 + u_{(x)}.\, y''_1 + v'_{(x)}.\, y'_2 + v_{(x)}.\, y''_2$$

Cuando reemplazamos en la **ED.**

$$u[y'_1 + py'_1 + qy_1] + v[y'_2 + py'_2 + qy_2] + u'y'_1 + v'y'_2 = f(x)$$

Como lo que estamos reemplazando en la **ED** son las funciones **Y1 e Y2**, estas dan 0. Es decir, lo que se encuentra entre los corchetes, será 0. Entonces solo nos queda:

$$u'y'_1 + v'y'_2 = f(x)$$

Y si traemos la condición que impusimos en (**1)**, tenemos un sistema de dos ecuaciones donde las incógnitas son **u'** y **v'**

$$\boxed{\begin{array}{c} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y'_1 + v'y'_2 = f(x) \end{array}}$$

Despejando por Cramer:

Donde el determinante de abajo es el **Determinante Wronskiano**:

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & {y'}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ {y'}_1 & {y'}_2 \end{vmatrix}} \rightarrow u = -\int \frac{y_2 . f(x)}{W} dx$$

Resolviendo la otra incógnita queda:

$$v = \int \frac{y_1 . f(x)}{W} dx$$

Estas dos fórmulas son las que vamos a utilizar para calcular los **parámetros**, y la solución queda:

$$y_G = y_{GH} + y_{GNH}$$

$$y_G = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_{(x)} . y_1 + v_{(x)} . y_2$$

Series de Fourier

Introducción

- $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots\ldots\ldots$ es una **sucesión** infinita de números si se conoce la ley que permite calcular cualquier término a_n para un "n" dado.

- $a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots\ldots$ es una **serie numérica** si $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots\ldots\ldots$ es una sucesión infinita de números.

- Dada $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n$ $\qquad$ S_n se llama enésima suma parcial de la serie.

- La serie **converge** si: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

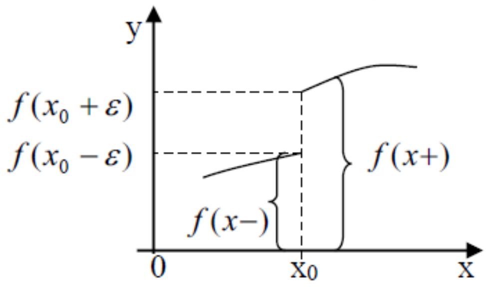
   Si la sumatoria me da un número, la serie ***converge.***

- La serie **diverge** si: $S_n \to \infty$ para $n \to \infty$

- La función $f(x)$ es periódica de período "a" si: $f(x) = f(x+a)$

- Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad ordinaria ó finita ó de 1º especie** en x_0 si tiene los límites izquierdo y derecho finitos y distintos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon)$$



geométricamente, en x_0 la función tiene un **salto** finito.

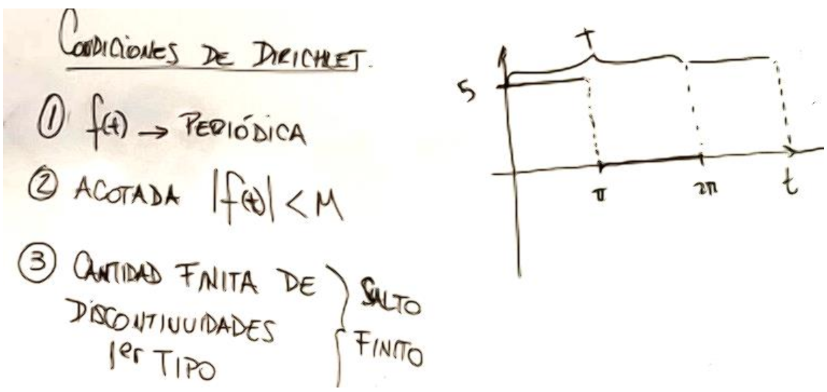
Condiciones de Dirichlet

Una función $f(x)$ satisface estas condiciones en el intervalo $(-\pi, \pi)$ si en este intervalo la función:

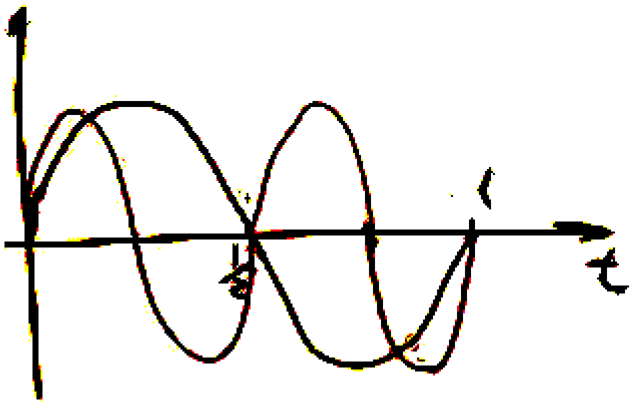
1- está uniformemente acotada, es decir si $|f(x)| \leq M$ para $-\pi < x < \pi$ y siendo M una constante.

2- no tiene más que un número finito de discontinuidades y estos son ordinarios o de 1º especie.

3- no tiene más que un número finito de extremos relativos.



Serie de Fourier



$$f(x) = f(x+T)$$
$$T = 1/f$$
$$y_1 = sen(2.\pi.1.t)$$
$$y_2 = sen(2.\pi.2.t)$$

Toda función periódica f(x) de período 2πla puedo representar como una serie de senos y cosenos.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.cos(n.t) + b_n.sen(n.t)]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1.cos(t) + b_1.sen(t) + a_2.cos(2t) + b_2.sen(2t) + \ldots$$

a_0, a_n, b_n Son los coeficientes de la serie y se calculan con las fórmulas:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx} \quad \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nxdx} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\mathrm{sen}\, nxdx}$$

Cálculo de los de coeficientes

A tener en cuenta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).cos(kx)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx).cos(kx)dx = \quad Sí\, n \neq k: 0 \;;\; Sí\, n = k, \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx).sen(kx)dx = \quad Sí\, n \neq k: 0 \;;\; Sí\, n = k, \pi$$

Cálculo del primer término

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

1. Tengo en cuenta la serie:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n.cos(n.t) + b_n.cos(n.t)]$$

2. Integro todo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n.cos(n.t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.sen(n.t)dt\right]$$

   Al integrar, todo lo que está dentro del corchete dará 0, ya que se cancelan las áreas.

3. Integro lo que queda:

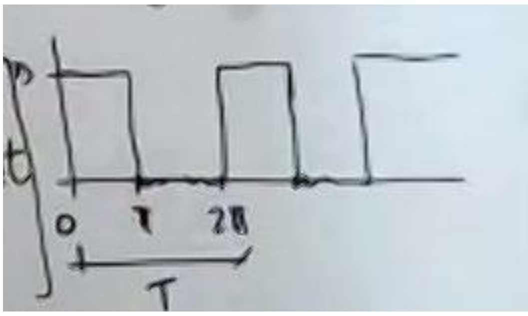
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \left|\frac{a_0}{2}t\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{a_0}{2}(\pi - (-\pi)) = \frac{a_0}{2}2\pi = \pi.a_0$$

4. Paso el π para el otro lado y queda:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Utilización del primer término:



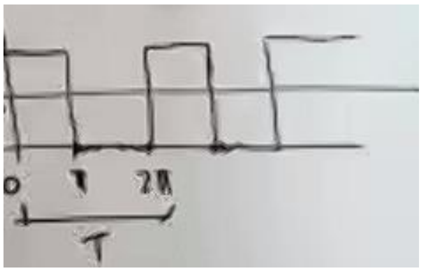
1. Tengo en cuenta la integral:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)dt$$

2. Refiriéndose al gráfico, entre π i y 2π la función vale 0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt$$

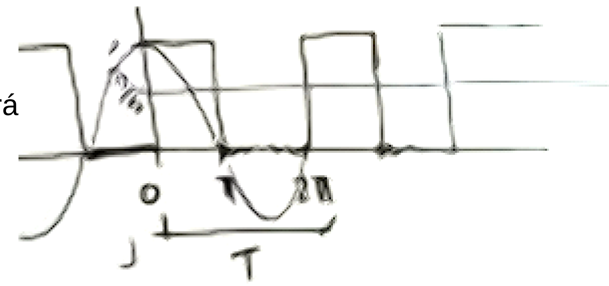
   Debido a que por área podemos dividir esa integral en dos partes, y entre pi y 2 pi el área valdrá 0.



$$a_0 : Valor\ medio\ de\ la\ función.$$

Este término es siempre el valor medio de la señal. A veces será más o menos fácil en su cálculo.

Cálculo 2do y 3er término



1. Teniendo en cuenta la función (en este caso cuadrada), nos damos cuenta que la onda será impar.
   Si multiplico una función par por otra impar, nos dará una función par.
   Al integrar una función par, esta dará 0.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\, cos(n.t)dt = 0$$

Es decir, si la función a representar es impar, solamente tendremos términos que tiene 0.
Si la función fuera una función par, solo tendremos términos con cosenos.

2. Entonces tendremos en cuenta el otro término, que sabemos que no dará 0.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\, sen(n.t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t).\, sen(n.t)dt$$

3. Sacamos f(t) afuera, ya que sería la amplitud de nuestra onda.

$$b_n = \frac{5}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen(n.t)dt = \frac{5}{\pi}\left|\frac{-cos(n.t)}{n}\right|_0^{\pi}$$

4. Evaluó el Barrow:

$$b_n = \frac{-5}{n\pi}[cos(n.t) - cos(0)] = -\frac{5}{n\pi}[cos(n.t) - 1]$$

Se simplificó el coseno ya que valía 1, se cambiaron los signos para sacar el - afuera del corchete.

Utilización del 2do y 3er término

1. Cuando **n** es par, la función valdrá 0, ya que el coseno vale 1.
   Cuando **n** es impar, la función valdrá **X** ya que el coseno vale -1.

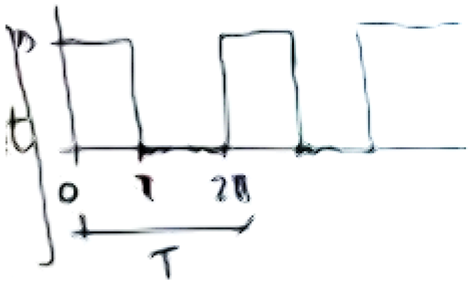
$$b_n = -\frac{5}{n\pi}[cos(n.t) - 1] =$$

$$Sí\; n = par: 0$$

$$Sí\; n = impar: \frac{2.5}{n\pi}$$

Cálculo de la serie

Tengo en cuenta la función que estaba trabajando: (ver imagen):



Una vez calculados los coeficientes, volvemos a la serie original:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n . cos(n.t) + b_n . cos(n.t)]$$

Reemplazo los valores calculados:

$$f(t) = \frac{5}{2} + \frac{2.5}{\pi} sen(t) + \frac{2.5}{3.\pi} sen(3t) + \frac{2.5}{5.\pi} sen(5t) + \frac{2.5}{7.\pi} sen(7t) + \ldots.$$

El primer término tendrá la frecuencia base de la señal. El resto son armónicos.

Si yo tomo los infinitos términos, esta función va a tomar la forma de mi onda original, es decir converge a la onda analizada.

Serie en forma exponencial

Por último, si yo uso la identidad de Euler:

$$cos(u) = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \quad ; \quad sen(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

Reemplazando con estas identidades en la serie original, paso la **Serie de Fourier en forma trigonométrica** a la **Serie de Fourier en forma exponencial**.

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n . e^{inx}}$$

Y sus coeficientes se calcularán con la fórmula

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . e^{-inx} dx}$$