Resumen AyGA

Cátedra: Álgebra y Geometría Analítica

Año: 2020

Curso: 1R3

Profesor/a: F. Muratore

Por: Enrique Walter Philippeaux

Resumen AyGA:

NUMEROS COMPLEJOS:

$$i = \overbrace{\sqrt{-1}}^{i},\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \dots$$

Formas de expresarlos:

Cartesiana: $Z = (a; b)$

Binómica: $Z = a + bi$

Trigonométrica: $Z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Polar: $Z = (r; \theta)$ ó $Z = r_\theta$

exponencial: $z = r . e^{i\theta}$

PROPIEDADES:

Adición:

- Conmutativa: $a + b = b + a$
- Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Elemento Neutro: $a + 0 = a$
- Opuesto Aditivo: $a + (-a) = 0$

Multiplicación:

- Conmutativa: $a.b = b.a$
- Asociativa: $a.(b.c) = (a.b).c$
- Elemento Neutro: $a.1 = a$
- Opuesto aditivo: $a.a^{-1} = 1$
- Distributiva: $a.(b + c) = a.b + a.c$

Operaciones:

- Suma (Solo binómica y Cartesiana)

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Resta (solo binómica y Cartesiana)

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- Multiplicación: (binómica/trigonométrica)

$$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ó

$$Z_1 = r_1(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$
$$Z_2 = r_2(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

$$Z_1 . Z_2 = r_1 . r_2 [\cos(\alpha + \beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha + \beta)]$$

- división: (binómica/trigonométrica)

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{(c^2 + d^2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta)]$$

Igualdad (Importante para radicación)

$$\text{sí } r_1 = r_2 \text{ y } \alpha = \beta + 2\pi . \underbrace{k}_{\text{Cantidad exacta de vueltas}}$$

- Potenciación: (sólo trigonométrica)

$$Z^n = r^n . [\cos(n.\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n.\beta)]$$

- Radicación: (sólo trigonométrica)

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi . k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2\pi . k}{n}\right)\right]$$

$n \to$ Indice de la raiz

$K \to \{K \in \mathbb{Z} / 0 \leq K < n\} \to 0, 1, 2 \dots (n-1)$

Resultados:

$(n-1)$ resultados diferentes.

VECTORES:

Vector: → Un segmento orientado que se utiliza para representar magnitudes vectoriales

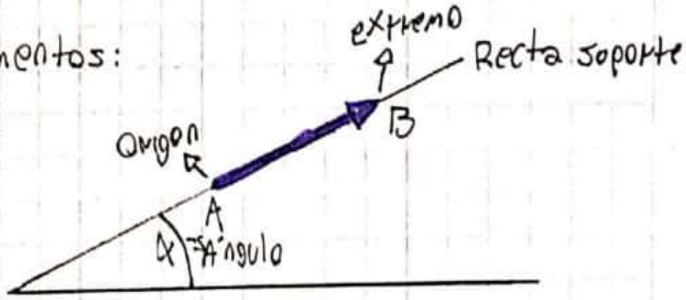
Se describe con:

→ Módulo: Intensidad de la magnitud representada x el vector.

→ Dirección: Recta soporte del vector.

→ Sentido: Dado por la punta del vector., de origen hacia el extremo.

Elementos:



Como se indica:

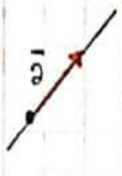
$\bar{a}$ o $\vec{a}$ o $\overline{AB}$ o $\overline{AB}$

longitud/módulo:

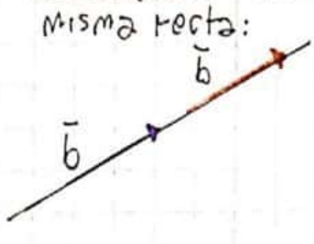
$|\bar{a}|$ → módulo de $\bar{a}$

Clases de vectores: → Equivalentes: $\neq$ origen, $=$ Módulo, dirección Sentido

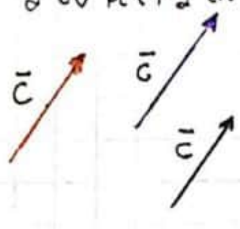
Aplicados (Fijos)
-Tienen el mismo origen



Deslizables o Axiales:
→ Se desplazan sobre su misma recta:



Libres:
Se desplazan paralelamente a su recta de acción:



~~Operaciones~~:

PROPIEDADES (Primera parte)

Vectores (Adición)

- Conmutativa: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$
- Asociativa: $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$
- Elemento Neutro: $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$
- Elemento opuesto: $\bar{a}+(-\bar{a})=(-\bar{a})+\bar{a}=\bar{0}$

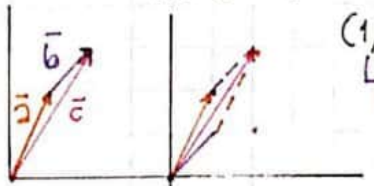
Vectores por escalares:

- Asociativa: $(\lambda.K).\bar{a}=\lambda.(K.\bar{a})=k.(\lambda.\bar{a})$
- Distributiva suma de $\bar{v}$: $\lambda.(\bar{a}+\bar{b})=\lambda.\bar{a}+\lambda.\bar{b}$
- Distributiva suma de k: $a.(\lambda.k)=\lambda.\bar{a}+k.\bar{a}$
- Elemento neutro: $\bar{a}.1=a$

OPERACIONES (SUMA/RESTA)

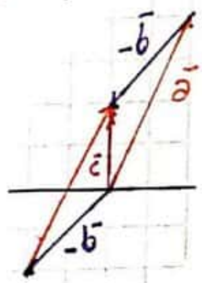
- SUMA: $\bar{a}=(1,2)$ $\bar{b}=(1,1)$

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$



$(1,2)+(1,1)=(1+1,2+1)$

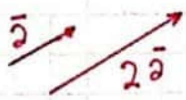
- Resta: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}$ (escala 2:1)

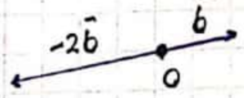


$(1,2)-(1,1)=(1-1,2-1)$

PRODUCTO DE VECTOR POR ESCALAR:

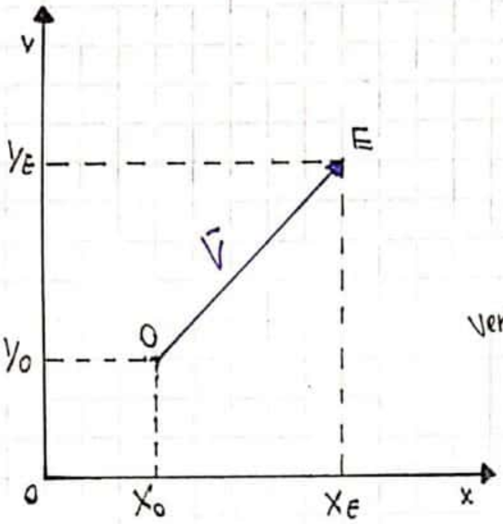
→ Resultado; otro $\bar{v}$ que cambia su modulo (K veces) y sentido (sí $K<0$)

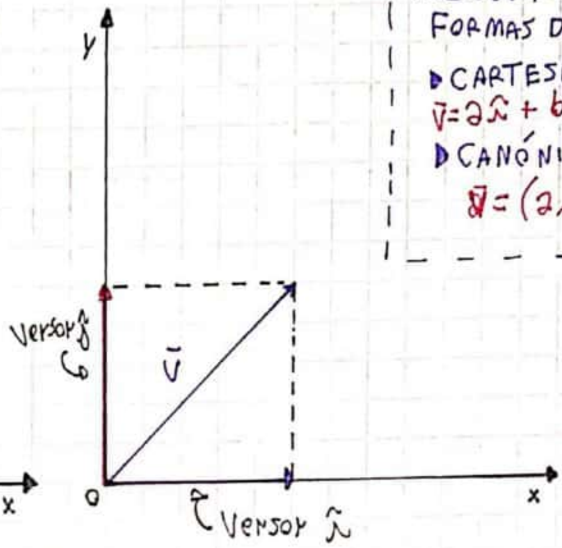




COMPONENTES DE UN VECTOR: (En el plano)

RECORDAR:
FORMAS DE EXPRESIÓN:
- CARTESIANA: $\bar{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$
- CANÓNICA: $\bar{v} = (a, b, c)$





Origen: $(x_0 ; y_0)$
Extremo: $(x_E ; y_E)$

Versores: $(\hat{i}$ y $\hat{j})$
X Y

Módulo: $a_1 = (X_e - X_0)$, $a_2 = (y_e - y_0)$ → $\bar{a} = (a_1 ; a_2)$ → $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

⇕

$\bar{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j}$ → expresión Cartesiana

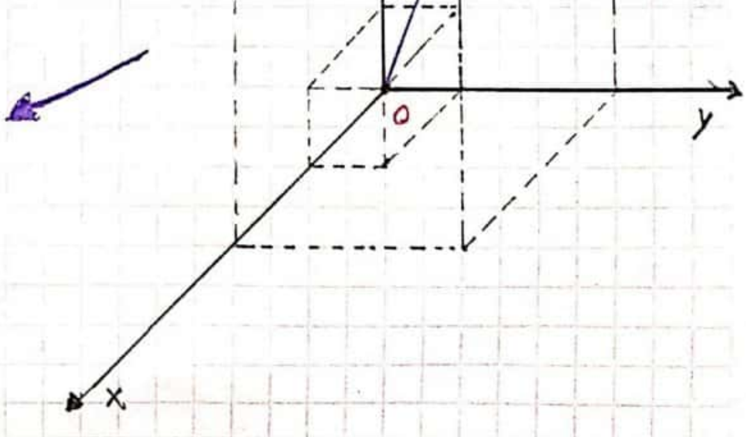
EN EL ESPACIO:

- Se agrega el eje z, y el versor $\hat{k}$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\bar{a} = a_1 . \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

$O = (1;1;1)$
$E = (3;3;4,5)$



RECORDAR:
Componentes de los vectores:
$\hat{i} = (1;0;0)$, $\hat{j} = (0;1;0)$
$\hat{k} = (0,0,1)$

COSENOS DIRECTORES:

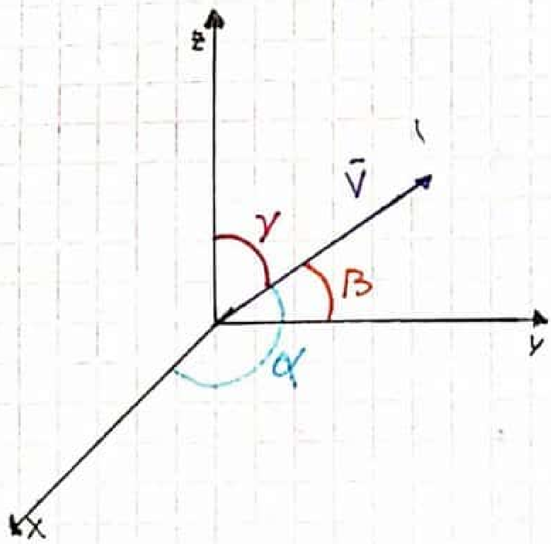
α β y γ $\rightarrow$ Ángulos directores

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

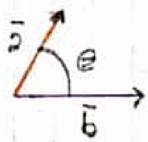


▶ Para sacar ángulos, usar arc cos ó $\cos^{-1}$

PRODUCTO ESCALAR ENTRE 2 VECTORES: Ej: $W = \bar{F} \cdot \bar{D}$ [Joule]
(Producto punto. Producto Interno)

Definición: número que se obtiene de multiplicar al módulo de dos vectores por el coseno del ángulo entre esos dos vectores.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\theta$$



▶ CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:

Sí $\theta = 90° = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

▶ El producto escalar será nulo sin ser $\bar{a}$ y $\bar{b}$ nulos.

¡Ortogonal = Perpendicular!

▶ Expresión CARTESIANA:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

▶ Propiedades:

▶ Conmutativa $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

▶ Distributiva (a la suma de $\bar{v}$) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

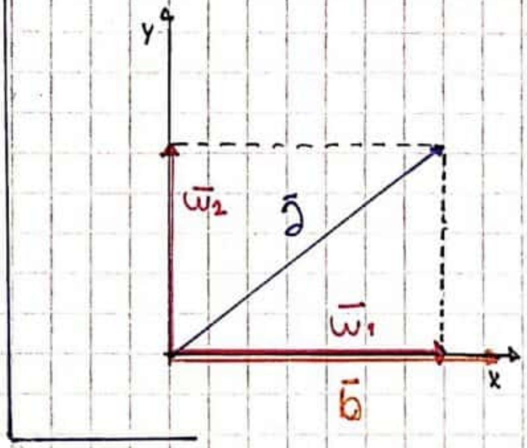
▶ Asociativa (al producto de k.x) $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = (\lambda \cdot \bar{b}) \cdot \bar{a}$

▶ Producto de un vector a sí mismo $= |\bar{V}|^2$ (módulo al cuadrado): $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \underbrace{\cos\theta}$

es 1, ya que el ángulo es 0.

▶ PROYECCIÓN ORTOGONAL:

▶ Descomponer un vector en la suma de dos vectores perpendiculares.



$\vec{w}_1$ proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{(|\vec{b}|)^2} \cdot \vec{b}$$

$\vec{w}_2$ Proyección ortogonal de $\vec{a}$ ortogonal a $\vec{b}$

$$\vec{w}_2 = \vec{a} - \vec{w}_1 = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{(|\vec{b}|)^2} \cdot \vec{b}$$

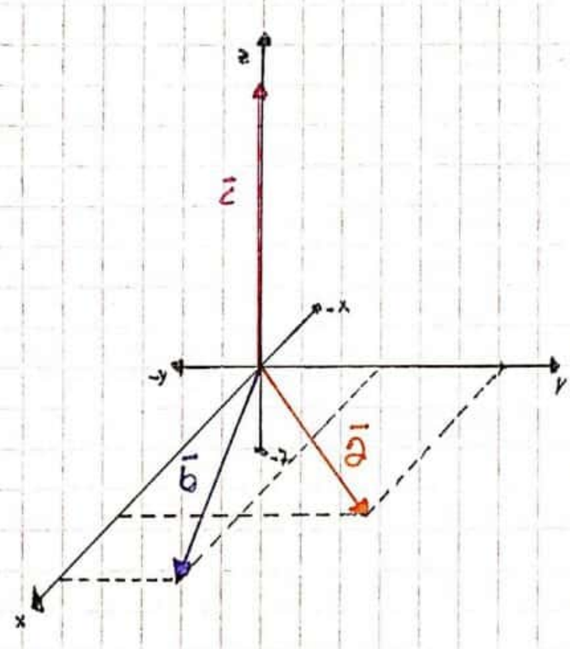
PRODUCTO VECTORIAL
(Producto cruz, Producto Externo)

(UTILIZADO PARA CALCULAR SUPERFICIE)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

▶ Definición: Se denomina producto vectorial entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al vector $\vec{c}$ perpendicular al plano que ellos forman, que tiene por módulo al producto de los módulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por el seno del ángulo que forman dichos vectores.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen} \theta$$



▶ Sentido: (Regla mano derecha)
- → Índice → Vector que premultiplica
- → Mayor → vector que posmultiplica
- → Pulgar → sentido del producto.

▶ Paralelismo: → $\theta = 0°$ ó $180°$

Si $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

(ninguno de los vectores es nulo)

▶ Propiedades:
- ▶ ANTICONMUTATIVA: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- ▶ DISTRIBUTIVA A IZQUIERDA $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- ▶ DISTRIBUTIVA A DERECHA $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- ▶ ASOCIATIVA A MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR
  $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$
- ▶ Producto Nulo: $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$
- ▶ Producto Igual vector es nulo:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

- **EXPRESIÓN CARTESIANA:** (de $\bar{a}.\bar{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$$C_1\hat{i} + C_2\hat{j} + C_3\hat{k}$$

- **Cálculo**

→ Uso de determinantes:

$$\bar{U} \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = +\hat{i}\begin{vmatrix} U_2 & V_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} U_1 & U_3 \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}$$

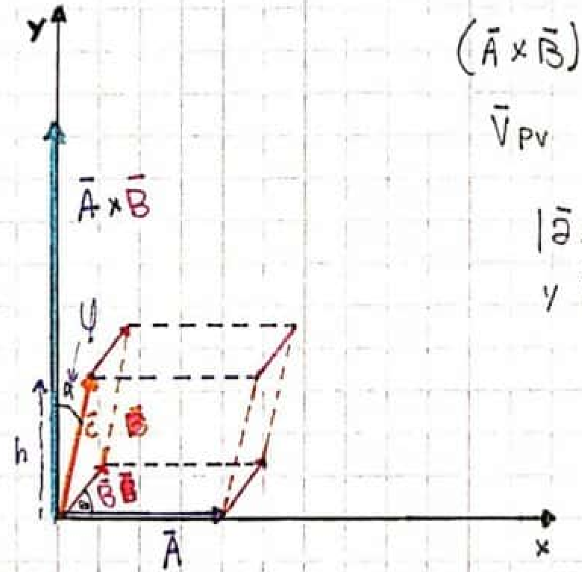
$$= \hat{i}(U_2.V_3 - V_2.U_3) - \hat{j}(U_1.V_3 - V_1.U_3) + \hat{k}(V_1.V_2 - V_1.U_2)$$

$$= C_1\hat{i} + C_2\hat{j} + C_3\hat{k} = \bar{c} = (\hat{i};\hat{j};\hat{k})$$

- **Usos:**
  - Cálculo de superficie de paralelogramo. ($|\bar{a} \times b|$) → uso el módulo
  - Cálculo de momento ($M = F x d$)

PRODUCTO MIXTO: $(\bar{a} \times \bar{c}).\bar{c}$ ó $(\bar{a} \wedge \bar{b}).\bar{c}$

→ es el resultado del producto vectorial de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ multiplicado en forma escalar por el vector $\bar{c}$



$(\bar{A} \times \bar{B}) . \bar{c}$

$\bar{V}_{PV} . \bar{c} =$ Volumen

$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|.|\bar{b}|. \operatorname{sen}\theta =$ Superficie

y $\bar{V}_{PV} . \bar{c} = |\bar{V}_{PV}|.\underbrace{|\bar{C}|.\cos\varphi}$

$\bar{V}_{PV} . \bar{c} = |\bar{V}_{PV}|.\ h =$ Sup. Altura $=$ Volumen

(si el volumen es negativo, $\varphi > 90°$)

- **EXPRESIÓN CARTESIANA**

$$(\bar{a} \times \bar{b}).\bar{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)C_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)C_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)C_3$$

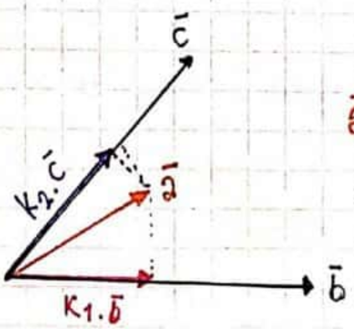
- **Cálculo:**

→ Con determinante

$$(\bar{a} \times \bar{b}).\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \to \ldots$$

COMBINACIÓN LINEAL:

→ Dados 3 vectores pertenecientes a un plano y no paralelos:



$$\bar{a} = K_1 . \bar{b} + K_2 . \bar{c}$$

el vector $\bar{a}$ está expresado como combinación lineal de los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$

$$(a_1 ; a_2) = K_1 (b_1 ; b_2) + K_2 (c_1 ; c_2)$$

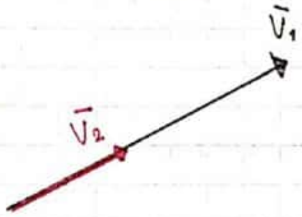
$$\Downarrow$$

Sist. de ecuaciones 2x2

$$\begin{cases} a_1 = K_1 . b_1 + K_2 . C_1 \\ a_2 = K_1 . b_2 + K_2 . C_2 \end{cases} = \Delta \left[\begin{array}{cc|c} b_1 & C_1 & a_1 \\ b_2 & C_2 & a_2 \end{array}\right]$$

▶ Vectores Linealmente dependientes:

Un conjunto de vectores es LD si existe alguna combinación lineal con coeficientes no nulos



$$\bar{0} = K_1 . \bar{V}_1 + K_2 . \bar{V}_2 \qquad \text{Si } K_1 \neq 0$$

$$\bar{V}_1 = \frac{K_2}{K_1} . \bar{V}_2$$

$\bar{V}_1 = K . \bar{V}_2$ → $\bar{V}_1$ es múltiplo escalar de $\bar{V}_2$

▶ los vectores LD son paralelos.

▶ En R3, si el producto mixto $= 0$, entonces los vectores son LD

▶ Vectores Linealmente Independientes:

Un conjunto de vectores es LI cuando la única posibilidad de expresar el vector nulo como combinación lineal, es únicamente con escalares todos nulos

$$\bar{0} = K_1 . \bar{V}_1 + K_2 . \bar{V}_2$$

▶ Los vectores LI tienen distinta dirección

▶ DEFINICIONES:

BASE: Conjunto de vectores LI en un espacio vectorial.

DIMENSIÓN: N° vectores LI en un espacio vectorial

MATRICES:

- **Definición:** Cuadrado ordenado de elementos de un conjunto alineados Horizontalmente en filas y Verticalmente en columnas

$$\underset{\text{siempre mayúscula}}{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_{\text{Columnas "n"}} \left.\right\} \text{Filas "m"} = A_{m\times n} = A_{2\times 3}$$

a_{ij} → Representa un elemento en la fila i y la columna j

TIPOS DE MATRICES:

- **Rectangular:** $A_{m\times n} \Leftrightarrow m \neq n$

Vertical: $m > n$ $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

Horizontal: $n > m$ $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

- **TRANSPUESTA:**

Se intercambian filas x columnas:

$A_{n\times p} \rightarrow A_{p\times n}$

$a_{ij} \rightarrow a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Matriz fila:**

$$A_{1\times n} = A = [1, 2, 7, \ldots, n]$$

Una fila

- **Matriz Columna**

$$A_{m\times 1} = A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \ldots \\ m \end{bmatrix}$$ Una columna

- **Matriz escalonada:**

Los elementos nulos aparecen en la parte inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ NULA**

Todos los elementos son 0. $O_{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Sólo cuadrados):

- **MATRIZ DIAGONAL**

Todos los elementos son nulos excepto los de la diagonal principal:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

TRAZA: $\sum a_{ij}$ para $i = j$

- **Matriz escalar:**

Matriz diagonal, pero con todos elementos iguales

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ IDENTIDAD**

Matriz triangular con elementos iguales a 1

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 1$ para $i = j$

MATRIZ SIMÉTRICA

Matriz igual a su transpuesta:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 7 & -4\\ 7 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 3\end{bmatrix}=A^T=\begin{bmatrix}4 & 7 & -4\\ 7 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$A_{n\times n}$ es simétrica $\Leftrightarrow A=A^T$

$$a_{ij}=a_{ji}$$

MATRIZ ANTI SIMÉTRICA:

Matriz igual a su transpuesta cambiado de signo y los elementos de la diag. principal son 0.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}=-A^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$A=-A^T \Leftrightarrow$ sí $a_{ij}=a_{ji}$, $a_{ii}=0$

MATRIZ TRIANGULAR

SUPERIOR

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

elementos no nulos por encima de la diag. principal.

Para $i>j$; $a_{ij}=0$

INFERIOR

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

elementos no nulos por debajo de la diag. principal.

Para $i<j$; $a_{ij}=0$

MATRIZ INVERSA:

$$A.B=B.A=I \rightarrow B=A^{-1}$$

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix} \Big/ A.A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

MATRIZ ORTOGONAL

$$A.A^T=A^T.A=I$$

$$A^{-1}=A^T$$

OPERACIONES:

IGUALDAD:

Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales

$$\underbrace{A_{m\times n}=B_{m\times n}}_{\text{mismo orden}} \Leftrightarrow \underbrace{a_{ij}=b_{ij}}_{\text{elementos iguales.}}$$

Suma:

Ambas matrices deben ser del mismo orden

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

Multiplicación por escalar:

$$\lambda A=A.\lambda \Rightarrow \lambda a_{ij}$$

$$2A=\begin{bmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{bmatrix}$$

Propiedades:

Adición:

- Conmutativa: $A+B=B+A$
- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Elem. neutro: $A+0=0+A=A$
- Elem. opuesto: $A+(-A)=0$
- Transpuesta de la suma: $(A+B)^T=A^T+B^T$

Multiplo por escalar:

- Asociativa: $\lambda_1(\lambda_2 A)=(\lambda_1\lambda_2).A$
- Distributiva respecto a la suma de mat.: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- Distributiva respecto a la suma de escal.: $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$
- Elemento Neutro: si $\lambda=1 \Rightarrow \lambda A=A$

MULTIPLICACIÓN/PRODUCTO DE MATRICES

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$ → Columnas A = Filas B

Cond necesaria

A premultiplica

B a B posmultiplica

A.B	B
A	C

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix} \\ \hline A= \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{matrix} \end{array}$$

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = C_{2\times 3}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

PROPIEDADES:

- ANTICONMUTATIVA: $A.B = -B.A$ Siendo $A_{m\times n}$; $B_{n\times p}$; $C_{p\times q}$
  → en general, $A.B \neq B.A$, excepto en $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
- ASOCIATIVA:
  $A.(B.C) = (A.B).C$
- DISTRIBUTIVA A la suma de M:
  A IZQUIERDA: $A.(B+C) = A.B + A.C$
  A DERECHA: $(A+B).C = A.C + B.C$
- ELEMENTO NEUTRO: $A.I = I.A = A$ → sólo si A es cuadrada
- TRANSPUESTA DEL PRODUCTO: $(A.B)^T = B^T \cdot A^T$ (nótese que cambian de lugar)
- ASOCIATIVA A LA MULT. POR ESCALAR: $\lambda.(A.B) = (\lambda.A).B = A.(\lambda B)$
- PRODUCTO NULO: $A.0 = 0.A = 0$

MATRIZ EQUIVALENTE POR FILAS:

Una matriz B es equivalente a A si se puede transformar a la matriz A en la matriz B mediante una sucesión finita de operaciones elementales

Operaciones Elementales.

$e_i(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$	$e_{ir}(\lambda)$ con $i \neq r$	Intercambiar filas i por r.
multiplicar la fila i por un escalar	sumar a la fila r, previamente multiplicada por el escalar λ a la fila i	e_{ir}

▶ MATRIZ REDUCIDA POR FILAS

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&7\\0&0&1&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0&2&7\\0&1&7&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

▶ Los elementos conductores se encuentran más a la derecha que la fila anterior

▶ Los elementos conductores deben valer 1

▶ En las columnas de los elementos conductores, el resto de los elementos deben valer 0.

▶ Las filas nulas, si existen, deben estar debajo de las filas no-nulas.

▶ Rango de una matriz

→ Cantidad de vectores Fila/Columna linealmente Independientes

Cálculo: ▲ Cantidad de filas no nulas de la matriz reducida por filas o escalonada

▲ Si el determinante de la matriz es $\neq 0$, el rango es igual al orden de esta (solo cuadrados)

▶ MATRIZ ELEMENTAL

defi: Matriz cuadrada de orden $n \times n$ que se obtiene realizando una operación elemental en la matriz elemental.

$$I = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad e_{12} \to \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \Big/ \; e_{31}(2) \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix} \Big/ \; e_3(1/2) \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}$$

▷ Se puede decir que al aplicar operaciones elementales a una matriz, estamos usando Matrices Elementales

$E.A$ es la misma matriz A, efectuando las mismas operaciones elementales.

▶ MATRIZ INVERSA

▶ CONDICIÓN: $\det(A) \neq 0 \iff \underbrace{A_{n \times n}}_{\text{Sea cuadrada}} \; ; \; \underbrace{\nexists CL(\text{Vectores } LD)}_{\text{no hayan filas nulas en su reducida por filas/escalonada.}}$

▶ Vectores fila sean L.I.

$$A.B = I \Rightarrow B = A^{-1}$$

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

Cálculo:

A	I	/
...	...	e
I	A^{-1}	/

Se colocan lado a lado la matriz A y su Identidad, y se hacen operaciones elementales hasta convertir a A en la matriz Identidad.

▶ Si no se obtiene la matriz I, $\nexists A^{-1}$.

▸ Justificación:

$$E_K \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$
$$E_K \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}} = I \cdot A^{-1}$$
$$E_K \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot I = A^{-1}$$

▸ PROPIEDADES:

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (cambio el orden)
3. $A^n = A.A. \ldots A \Rightarrow A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
6. $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$

DETERMINANTES:

▸ Definición: Es una función que se establece entre una matriz cuadrada "A" y un número real denominado determinante.

▸ Se obtiene realizando la suma de todos los productos posibles de n elementos tomados de los n^2 elementos de la matriz, siempre que en cada producto haya un elemento de cada fila y uno de cada columna, anteponiendo el signo según la cantidad de permutaciones que se indican en las filas y columnas sean de clase par o impar

- → Cantidad par de inversiones: Signo +
- → Cantidad Impar de inversiones: Signo −

→ Suma de los productos de las diagonales principales menos la suma de los productos de las diagonales secundarias.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad det(A) = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})$$

▸ MATRIZ REGULAR:

Cuando su det $\neq 0$. → La matriz tiene n vectores fila/columna Linealmente Indep.

$Rg(M) = n$ → Su rango es igual a su orden.

▸ MATRIZ SINGULAR:

Cuando su det $= 0$. → Presenta dependencia Lineal en algun vector fila/columna. $Rg(M) < n$ → Su rango es menor a su orden.

▶ MÉTODOS DE CÁLCULO:

- **Regla de sarrus:**
  - Para matrices de orden 2 y 3.
  - Resolución:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$\det = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23} - a_{21}.a_{12}.a_{33} - a_{11}.a_{32}.a_{23} - a_{31}.a_{22}.a_{13}$$

Recordatorio:

Menor Complementario: (M_{ij})

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ → el menor complementario al elemento 1 o a_{11}, se obtiene tachando su columna y fila:

(2) $\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix}$ y tomando la matriz que quede sin tachar:

(3) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

Adjunto/cofactor de un elemento:

Es el menor complementario, con el signo + o − según la suma de los subíndices:

El cofactor del elemento $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ → Cofactor de 1 $= (-1)^{1+1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = +\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

TRUCO: MATRIZ de signos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{bmatrix}$$

- Método de cofactores (Regla de Laplace)
  - Para matrices de orden mayor igual a 3

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

nol det es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por sus cofactores

TRUCO: Tomar fila con mayor cantidad de ceros y unos.

- Método de triangulación:
  - Para matrices de orden mayor igual a 3.
  - Producto de los elementos de la diagonal principal, multiplicado por:
    - (-1) por cada operación e_{ir} (cambio de fila) utilizada.
    - $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ por cada operación $e_{i\lambda}$ (multiple de fila por escalar) utilizada.
  - 1. Reducir la matriz a triangular superior con operaciones elementales.
    2. Multiplicar los números de la diagonal principal
    3. multiplicar por (-1) segun cada cambio de fila
    4. multiplicar por $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ segun cada operación de multiplo de fila por escalar. $(e_i(\lambda))$

- Método de Chio → Reduce matrices en 1 orden sin alterar su determinante:
  - Para matrices de orden mayor a 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1 en a_{11} → elemento pivote: en a_{11} → signo +

$$\det = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 - \frac{1.0}{1} & 4 - \frac{1.1}{1} \\ 3 - \frac{0.0}{1} & 1 - \frac{1.0}{1} \end{vmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 3.3 = 2 - 4 = -7$$

▶ Cálculo de matriz inversa:

▶ Sea $A_{n\times n}$ una matriz regular de orden n (cuadrada)

$$\Downarrow$$

$$|A| \neq 0$$

① Armar matriz cofactor a partir de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \overbrace{A_{COF}}^{C_A} = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = C_A$$

② transponer la matriz C_A

$$C_A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = Adj(A)$$ → esto es la matriz adjunta: C_A^T ó $(C_A)^T$

③ Dividimos la matriz Adjunta de A por el det. de A

$$Adj(A) = (C_A)^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} \Rightarrow \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

④ Comprobación:

$$A . A^{-1} = I$$

$A.A^{-1}$		-2	1
		$3/2$	$-\frac{1}{2}$
1	2	1	0
3	4	0	1

$= I$

▶ Propiedades de determinantes:

1. $|A| = |A^T|$

2. Si se cambia una fila por otra (e_{ir}), el det. cambia de signo.
   ▶ Consecuencia: Si una matriz tiene 2 filas iguales, su det = 0

$$|A| = -|A| \rightarrow 2|A| = 0; \; |A| = 0$$

3. $|K^n . A_{n\times n}| = K^n . |A|$

→ Al multiplicar una fila por un escalar K, el det queda multiplicado también por K.

4- Si una matriz tiene una fila nula, su det $= 0$.

(Retomando prop. 3:) $|0 \cdot A_{n\times n}| = |A| . 0 = 0$

5- $|A.B| = |A| . |B|$

6- Si en una matriz una fila está expresada como la suma de "n" términos, entonces el det. es igual a la suma de "n" determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$3 = 2+1$
$5 = 3+2$

7- Si una matriz es triangular, su det $=$ a la multiplicación de los elementos de la diagonal principal.

8- $|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|} \rightarrow |A^{-1}| . |A| = 1 \rightarrow |A^{-1} . A| = 1$

$|I| = 1$

9- $|A^3| = (|A|)^3 \rightarrow \det((A)^3) = (\det(A))^3$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:

- Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS:

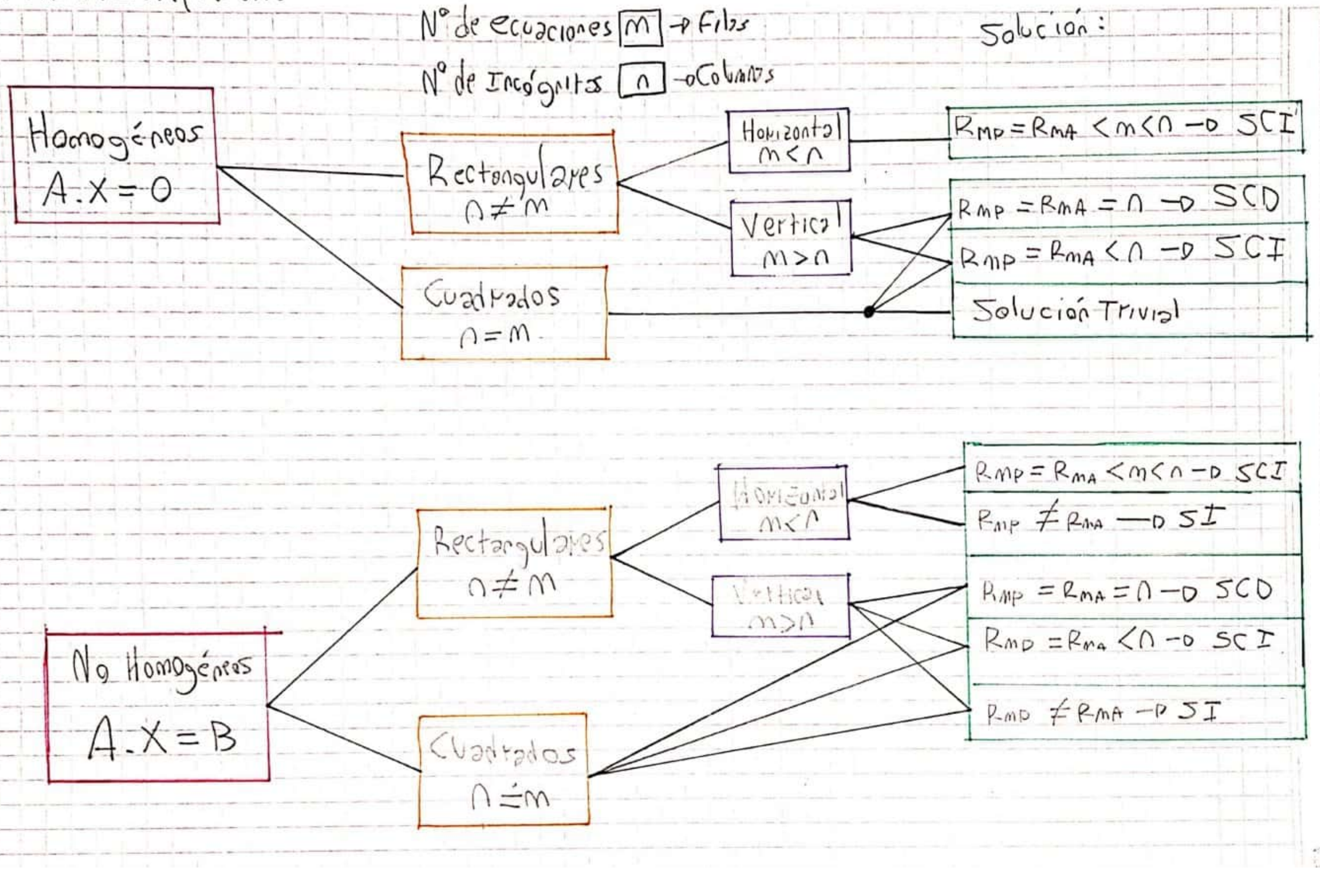
- **Es condicion necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones admita solucion, que el rango de la Matriz Principal y el de la Matriz Ampliada, sean iguales.**

$$\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{matrix} \rightarrow M = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \quad ; \quad M' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Matriz Principal ; Matriz Ampliada.

- el Rango de una matriz es igual al número de filas no nulas de la reducida x filas de esa matriz.

Término Independiente:



Métodos:

- Gauss
- Gauss - Jordan → más usado, resuelve todo.
- Método Matricial
- Método de Cramer

Gauss: Escalonar la matriz ampliada
con operaciones elementales de fila e_{ij}

$m=n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & R_1 \\ 0 & d & e & R_2 \\ 0 & 0 & f & R_3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{array}\right] \rightarrow SCD$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow SCI$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right] \rightarrow SCD$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] SCI.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right] SI$$

$m<n$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right] \rightarrow SCI$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow SCI$$

$m>n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow SCD$$

x puede ser 0 (solución trivial)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow SCI$$

Solución C D

$$x + y + z = 0$$
$$2x - 5y - 3z = 10 \rightarrow$$
$$4x + 8y + 2z = 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & 10 \\ 4 & 8 & 2 & 4 \end{array}\right] \boxed{e_{ij}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{-34}{7} & 68/7 \end{array}\right]$$

$R_g = 3 \quad R_g = 3$

SCD

despejar de abajo hacia arriba

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Solución C I

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 1 & -6 \end{array}\right] \boxed{e_{ij}} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 11/2 & 1/2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow SCI$$

$R_{MP} = 2, \quad R_{MA} = 2 < n = 3$

$$\frac{11}{2}y + \frac{1}{2}z = -5$$
$$y = -\frac{1}{11}z - \frac{10}{11} = \frac{-z-10}{11}$$

$$4x - 6y - 2z = 4 \rightarrow x = \frac{3y + z + 2}{2}$$

Reemplazamos y

$$x = \frac{4z - 4}{11}$$

Parametrizar.

Si $z = t$

$$y = \frac{-t-10}{11} \text{ y } x = \frac{4t-4}{11}$$

Conjunto solución:

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4t-4}{11} \\ \frac{-t-10}{11} \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/11 \\ -1/11 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot t + \begin{vmatrix} -4/11 \\ -10/11 \\ 0 \end{vmatrix}$$

NOTA

Gauss - Jordan

- Encuentra el valor de Incógnitas reduciendo la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ d & e & f & x \\ g & h & i & x \end{array}\right] \to \underbrace{e_{j,j'}}_{\text{(Filas)}} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ & 1 & 0 & x_2 \\ & & 1 & x_3 \end{array}\right] \text{ ó } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & x_1 \\ & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ & & & 1 & x_{..} \end{array}\right]$$

Soluciones:

Homogéneos

Cuadrados $n \times n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ SCD (sol. Trivial)} \quad R_{MA} = n$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SCI} \quad R_{MA} < n$$

$m \times n$

$m < n$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SCI}$$

$m > n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SCD sol trivial}$$

$R_{MA} = n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \text{SCI}$$

No Homogéneos

$n \times n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right] \text{ SCD}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SCI}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right] \text{ SI}$$

$m < n$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \end{array}\right] \text{ SCI}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right] \text{ SI}$$

$m > n$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SCD}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SCI}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ SI}$$

Metodo matricial

$$A \cdot X = B$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Si $\exists A^{-1}$, SCD

Si $\nexists A^{-1}$, ∞ sol. SCI

ó SI

Método de cramer:

$$\frac{\Delta M s_i}{\Delta MP} =$$

→ det

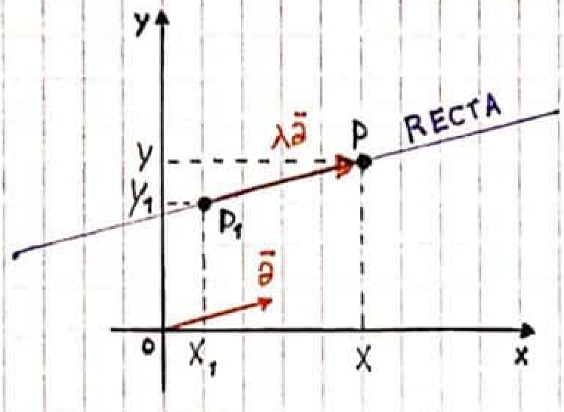
→ matriz sustituta → Reemplazo columna de incógnita x columna de resultados.

$$X = \frac{\Delta M s_x}{\Delta MP} \; ; \; y = \frac{\Delta M s_y}{\Delta MP} \; ; \; z = \frac{\Delta M s_z}{\Delta MP}$$

22. A = 4

RECTA Y PLANO: RECTAS:

- Es el lugar geométrico de todos los puntos tales que pasando por un punto de coordenados conocidos, se encuentra sobre una misma ~~recta~~ dirección dada por un vector conocido.



$\lambda \to$ parámetro que varía de $-\infty$ a ∞

$P(x;y) \to$ Punto Genérico
(Representa los ∞ puntos de la recta)

$P_1(x_1;y_1) \to$ Punto Conocido

$\vec{a} \to$ Vector de dirección

$\overline{P_1P} \parallel \vec{a} \therefore \overline{P_1P} = \lambda.\vec{a}$

- Ecuaciones (10)

SIRVEN PARA R3

Ecuación Vectorial o paramétrica

(1) $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \lambda a$

(2) $(x;y) = (x_1;y_1) + \lambda(a_1;a_2)$

(Válido en R^2, R^3, R^n)

$(x;y;z) = (x_1;y_1;z_1) + \lambda(a_1;a_2;a_3)$

ECUACIÓN Cartesiana Paramétrica:

(3) $R^2: \begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 \end{cases}$; (4) $R^3: \begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 \\ z = z_1 + \lambda a_3 \end{cases}$

$\Downarrow$

$(x;y;z) = (x_1,y_1,z_1) + \lambda(a_1;a_2;a_3)$

Ecuación simétrica: (Despejando λ en (3) y (4)).

(5)

$R_2: \quad \dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2}$

$R_3: \quad \dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2} = \dfrac{z-z_1}{a_3}$

Ecuación de la recta que pasa por un punto:

(despejando $y - y_1$ de ⑤).

⑥ $$y - y_1 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_1) \qquad tg\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_2}{a_1} = m$$

m = Pendiente (AM1)

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Forma Explícita:

(despejando y de ⑥)

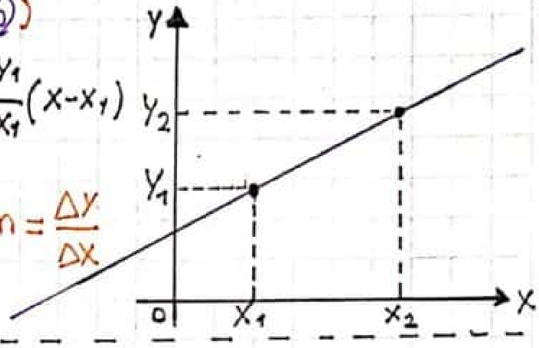
⑦ $$y - y_1 = m\,(x - x_1) \Rightarrow y = mx + b$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

(despejando de ⑥)

⑧ $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; \; m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Forma General o Implícita:

$$y = mx + b.$$
$$y - mx - b = 0$$
$$By \underbrace{- Bmx}_{A} \underbrace{- Bb}_{C} = 0$$

⑨ $$Ax + By + C = 0$$

$B = B$
$A = -Bm$
$C = -Bb$

$A B C \Rightarrow$ Num. Enteros.
$A \to +$

Ecuación Segmentaria:

(de ④)

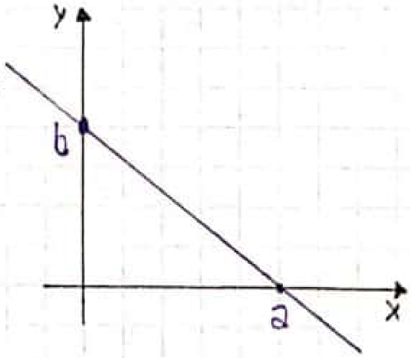
$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} + \frac{C}{-C} = 0$$

$$\frac{x}{\left(\frac{-C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-C}{B}\right)} = 1$$

⑩ $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

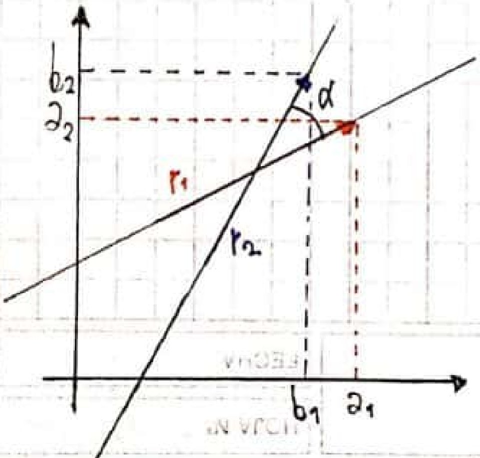
$$a = \frac{-C}{A}$$

$$b = \frac{-C}{B}$$



(Recta que pasa por los puntos a y b situados en los ejes x e y respectivamente)

Ángulo entre dos rectas:



→ Utilizando producto escalar de sus vectores directores:

$\vec{r}_1(a_1 ; a_2)$; $\vec{r}_2(b_1 ; b_2)$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos\alpha \to \alpha = \arccos \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$$ → producto escalar

$$\alpha = \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|}$$

→ Si $\cos\alpha = 0$ → Rectas perpendiculares

→ Si $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ → Rectas Paralelas

Forma trigonométrica:

1 $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

2 $\tan\alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$

3 $\tan\alpha_1 = m_1$, $\tan\alpha_2 = m_2$ $\Rightarrow$ $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

$$\boxed{\tan\alpha = \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right)}$$

Condiciones de perpendicularidad:

$r_1 \perp r_2 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \to$

$\cot 90^\circ = 0 \to 0 = \dfrac{1 + m_1 \cdot m_2}{\underbrace{m_2 - m_1}_{\neq 0}} \to 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = \dfrac{-1}{m_2}}$

$\cos\alpha = 0 \to 0 = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\underbrace{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|}_{\neq 0}} \to \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.}$

Condiciones de paralelismo:

$r_1 \parallel r_2$ $\quad r_1 = K \cdot r_2 \Rightarrow a_1\hat{i} + a_2\hat{j} = K(b_1\hat{i} + b_2\hat{j})$

$r_1(a_1; a_2)$

$r_2(b_1; b_2)$

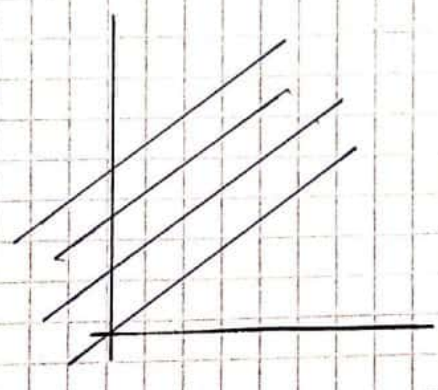
$a_1 = K \cdot b_1$

$a_2 = K \cdot b_2$ $\Rightarrow$ $\boxed{K = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}}$

Familia o Haz de rectas:

→ Satisfacen una única condición geométrica

RECTAS PARALELAS:



→ = Pendiente

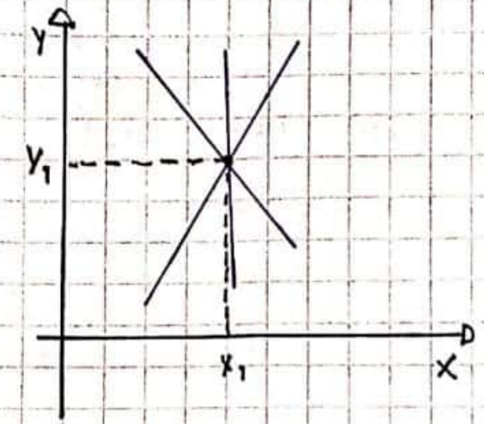
$$\boxed{\begin{array}{c} y = m_1 x + K \\ -\infty < K < \infty \end{array}}$$

↓

constante arbitraria.

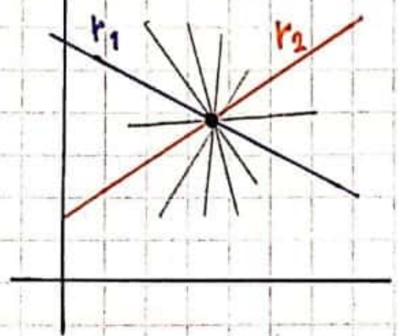
RECTAS CONCURRENTES → Pasan por un punto en común.
→ varía la pendiente.

(en el plano)



$$\boxed{y - y_1 = K(x + x_1) \qquad -\infty < K < \infty}$$

RECTAS QUE PASAN POR EL PUNTO INTERSECCIÓN DE OTRAS 2.



$$\left.\begin{array}{l} R_1:\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ R_2:\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{array}\right] \text{ nó } //$$

$$\downarrow$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + K(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$ → ecuación de las ∞ rectas que pasan por la intersección de R_1 y R_2.

$$-\infty < K < \infty$$

$$A_1 x + K.A_2 x + B_1 y + K.B_2 y + C_1 + K.C_2 = 0$$

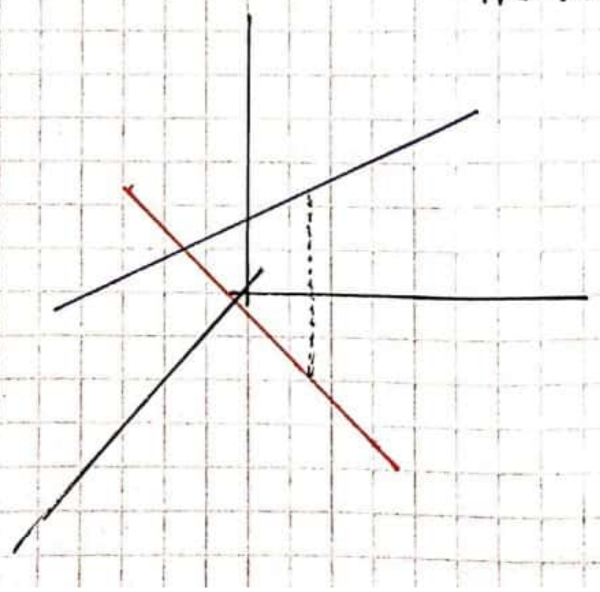
determina la ecuación de cualquier recta que pasa por la intersección de otras 2 sin conocer el punto.

$$x(A_1 + K.A_2) + y(B_1 + K.B_2) + (C_1 + K.C_2) = 0$$

→ despejo y

$$y = \underbrace{-\frac{(A_1 + K.A_2)}{(B_1 + K.B_2)}}_{m} x \underbrace{- \frac{(C_1 + K.C_2)}{(B_1 + K.B_2)}}_{b}$$

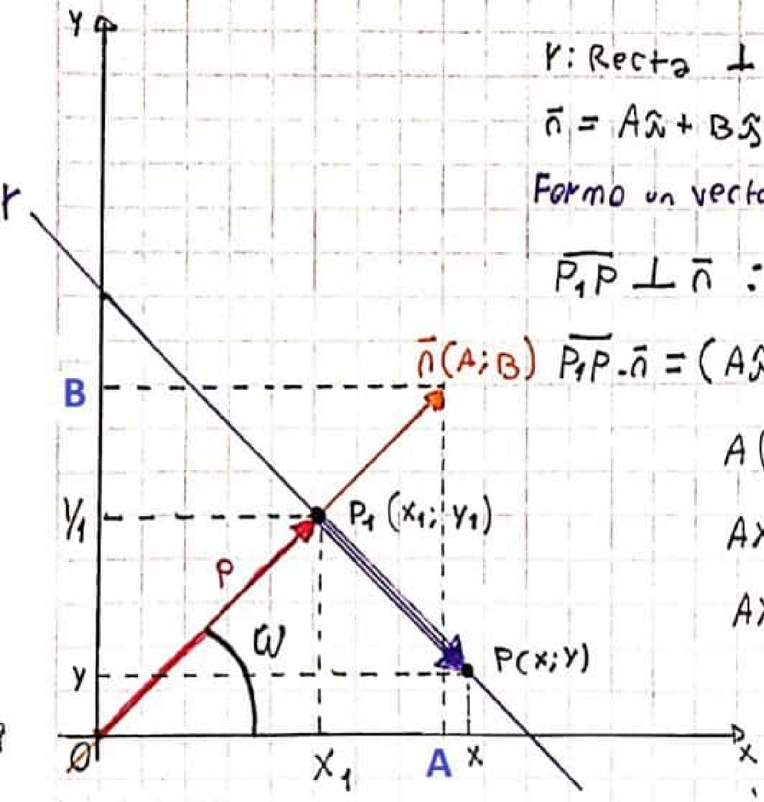
Rectas Alabeadas: → Nó son paralelas ni se cortan.
No comparten un plano



Para determinar si dos **rectas** son **alabeadas**

1) Determina si son paralelas
2) Determina si hay intersección
3) Si no ocurre ni 1) ni 2) entonces son alabeadas

FORMA NORMAL DE LA ECUACION DE LA RECTA EN R2



r: Recta ⊥ a un vector $\vec{n}$, que pasa por P_1

$\vec{n} = A\hat{x} + B\hat{y}$ p → dist desde el origen hasta la recta en dirección normal

Formo un vector $P_1 \to P$: $\overline{P_1P} = (x-x_1)\hat{x} + (y-y_1)\hat{y}$

$\overline{P_1P} \perp \vec{n} \therefore \overline{P_1P}\cdot\vec{n} = 0$

$\overline{P_1P}\cdot\vec{n} = (A\hat{x} + B\hat{y})\cdot\left((x-x_1)\hat{x} + (y-y_1)\hat{y}\right) = 0$

$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$

$Ax - Ax_1 + By - By_1 = 0$

$Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$

$$\boxed{\frac{A}{|\vec{n}|}x + \frac{B}{|\vec{n}|}y - \left(\frac{A}{|\vec{n}|}x_1 + \frac{B}{|\vec{n}|}y_1\right) = 0}$$

$\frac{A}{|\vec{n}|} = \cos w$

$\frac{B}{|\vec{n}|} = \operatorname{sen} w$

p -> Distancia desde el origen hasta la recta

$$\underbrace{x.\cos w + y.\operatorname{sen} w}_{} - \underbrace{(x_1.\cos w + y_1.\operatorname{sen} w)}_{} = 0$$

$$\boxed{x.\cos w + y.\operatorname{sen} w = 0} \qquad p = x_1.\cos w + y_1.\operatorname{sen} w$$

$$\boxed{|\vec{n}| = \pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$x.\cos w + y.\operatorname{sen} w - p = 0$$

Ecuación Implícita:
$Ax + By + C = 0$

(Pitágoras)

TRANSFORMACIÓN
Ecuación Implícita ⇔ F. Normal:

FORMA NORMAL:

$$\overset{\oplus}{\frac{A}{|\vec{n}|}}x + \overset{\oplus}{\frac{B}{|\vec{n}|}}y + \overset{?}{\frac{C}{|\vec{n}|}} = 0$$

x.cos w + y.sen w - p = 0

$\frac{A}{|\vec{n}|} = \cos w$

$\frac{B}{|\vec{n}|} = \operatorname{sen} w$

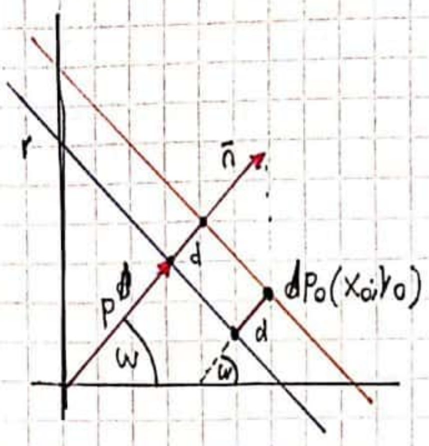
$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+P^2}} = 0$$

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0 \qquad -p = \underbrace{\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}}_{}$$

$$\frac{Ax+B\,y+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

elegir signo para que quede ⊖

CÁLCULO DIST. / y • o a otra recta //



① Armo una recta paralela a r que pase por $P_0(x_0;y_0)$

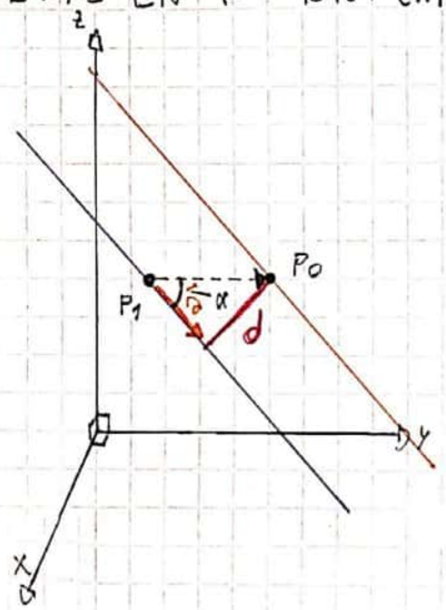
② $r_0 // r \rightarrow x.\cos w + y.\operatorname{sen} w - (P+d) = 0$

③ $d = x.\cos w + y.\operatorname{sen} w - P$

④ $$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = d \quad ; \quad -P = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

elegir signo para que quede $\ominus$

RECTAS EN R^3: Dist entre un • y una / ó entre 2 / paralelas:



$P_1(x_1;y_1;z_1)$; $P_0(x_0;y_0;z_0)$

$\bar{a} \rightarrow$ dirección de la recta R que pasa por el punto P_1

producto vectorial

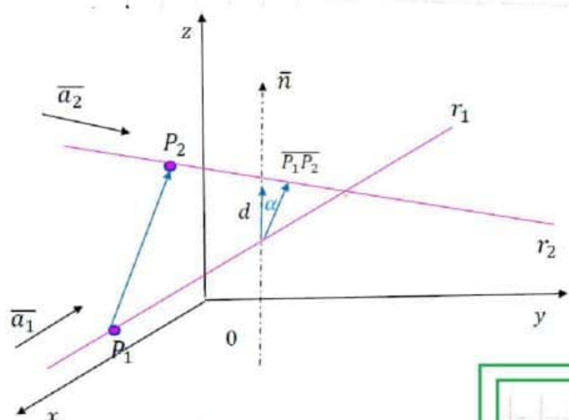
$|\overline{P_1P_0} \wedge \bar{a}| = |\overline{P_1P_0}|.|\bar{a}|.\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{|\overline{P_1P_0}|} \therefore |\overline{P_1P_0}|.\operatorname{sen}\alpha = d$

$$|\overline{P_1P_0} \wedge \bar{a}| = |\bar{a}|\, d$$

$$\boxed{d = \frac{|\overline{P_1P_0} \wedge \bar{a}|}{|\bar{a}|}}$$

Distancia entre dos rectas alabeadas



$\cos w = \frac{d}{|\overline{P_1P_2}|} \rightarrow d = |\overline{P_1P_2}|.\cos w$

$\bar{n} \perp r_1$ y r_2

$\overline{P_1P_2}\,.\,\bar{n} = |\overline{P_1P_2}|.|\bar{n}|.\cos w$

$\bar{n} = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2$

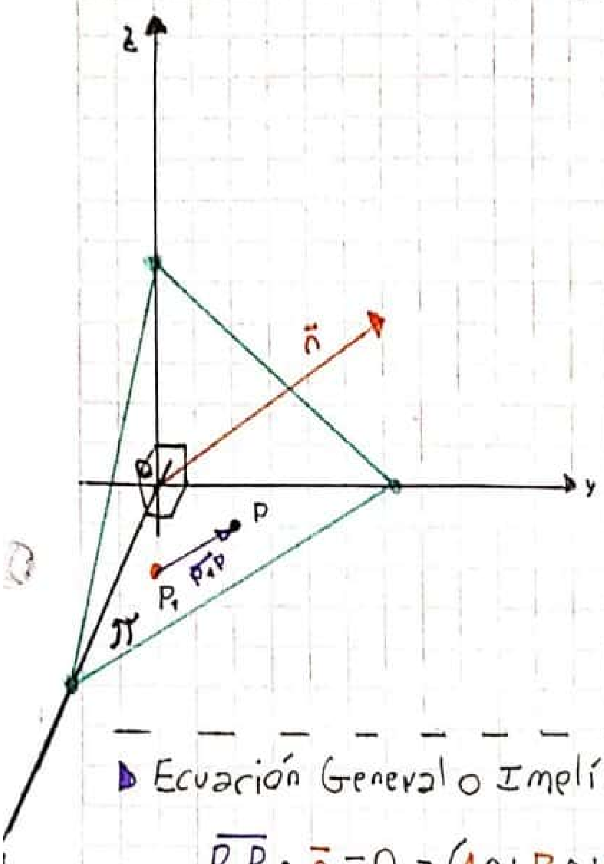
$\overline{P_1P_2}\,.\,\bar{n} = |\bar{n}|.d$

Producto escalar y vectorial!!!

$$\boxed{d = \frac{\overline{P_1P_2}\,.\,\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{\overline{P_1P_2}\,.\,(\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2)}{|(\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2)|}}$$

PLANO:

- Ecuación Vectorial del plano determinada por un punto y la dirección de su normal:



P_1 → Punto Conocido $(x_1; y_1; z_1)$

P → Punto genérico $(x; y; z)$

} pertenecen al plano "π"

$\overline{P_1P}$, $\vec{n}(A; B; C)$ → Vector normal ($\perp$ al plano)

$$\overline{P_1P} \perp \vec{n} \Rightarrow \boxed{\overline{P_1P} \cdot \vec{n} = 0}$$

1 Ecuación Vectorial del Plano

- Ecuación General o Implícita:

$$\overline{P_1P} \cdot \vec{n} = 0 = (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}).\left[(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}\right] = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$Ax - Ax_1 + By - By_1 + Cz - Cz_1 = 0$$

$$Ax + By + Cz \underbrace{- (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}_{D} = 0$$

A, B, C: enteros

A: Positivo (+)

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

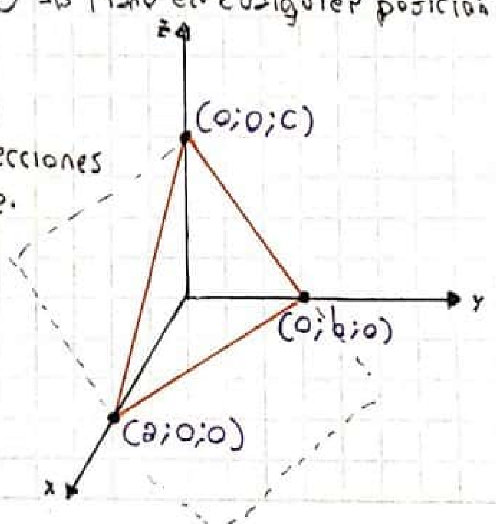
Ecuación General/Implícita

- ECUACIÓN SEGMENTARIA

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ siendo $A, B, C, D \neq 0$ → Plano en cualquier posición.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-D}{A} = a \quad (a;0;0) \\ y = \dfrac{-D}{B} = b \quad (0;b;0) \\ z = \dfrac{-D}{C} = c \quad (0;0;c) \end{cases}$$

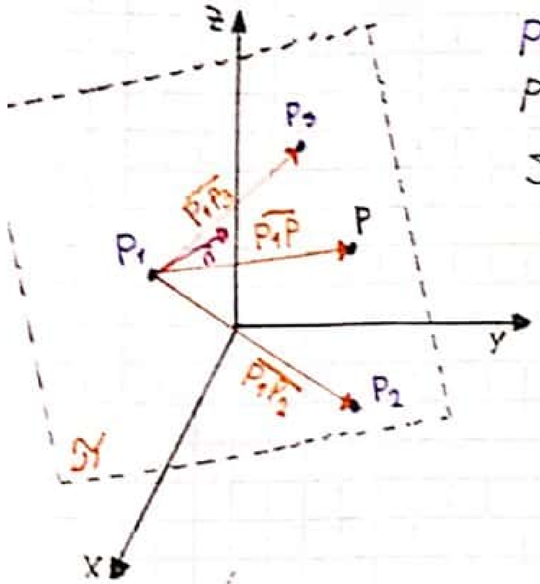
a, b y c → dist. desde el origen hasta las intersecciones del plano con cada eje.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

▶ ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS:

→ Por tres puntos no alineados pasa un único plano:



$P_1(x_1; y_1; z_1)$; $P_2(x_2; y_2; z_2)$; $P_3(x_3; y_3; z_3)$

$P(x; y; z)$

Si los 3 vectores: $\overline{P_1P}$; $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$

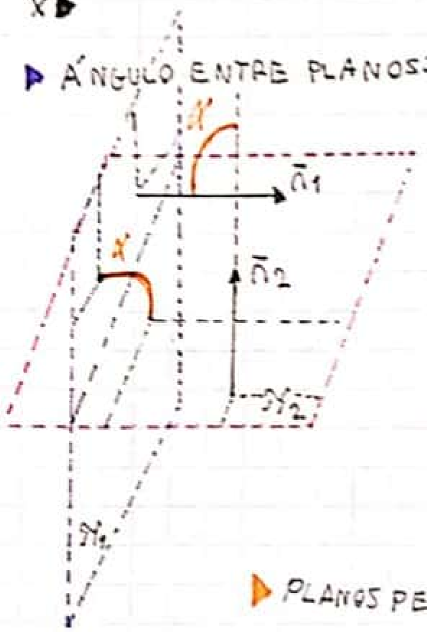
Son coplanares, su producto mixto es 0.

$$\boxed{\overline{P_1P} \cdot (\overline{P_1P_2} \wedge \overline{P_1P_3}) = 0}$$

ECUACIÓN

$\bar{n} = (\overline{P_1P_2} \wedge \overline{P_1P_3})$ → Normal del plano

▶ ÁNGULO ENTRE PLANOS:



Con el producto escalar entre sus vectores normales.

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = |\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2| \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$$

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

▶ PLANOS PERPENDICULARES:

Si $\pi_1 \perp \pi_2$ → $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$

Si $\alpha = 90°$ → $\cos\alpha = 0$

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

▶ PLANOS PARALELOS:

Si $\pi_1 // \pi_2$ → $\bar{n}_1 // \bar{n}_2$

$(A_1; B_1; C_1) = \lambda (A_2; B_2; C_2)$ → son Comb. Lineal

se cumple que:

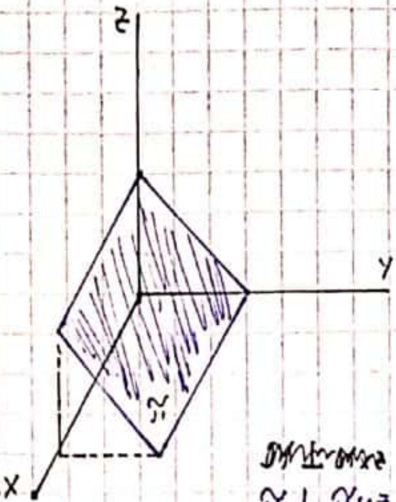
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

y si π_1 es $= \pi_2$: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

POSICIONES RELATIVAS DEL PLANO:

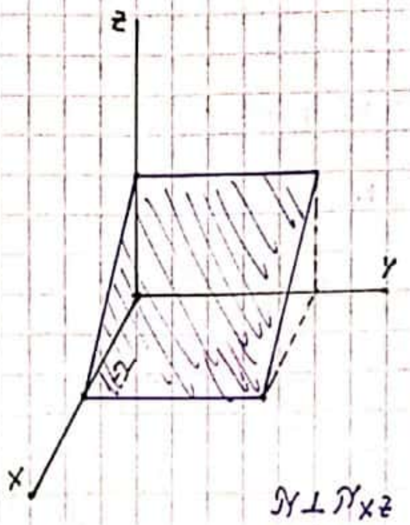
π // al eje que no figura
π ⊥ al plano que forman los ejes que sí figuran

$A = 0$ $\quad By + Cz + D = 0$



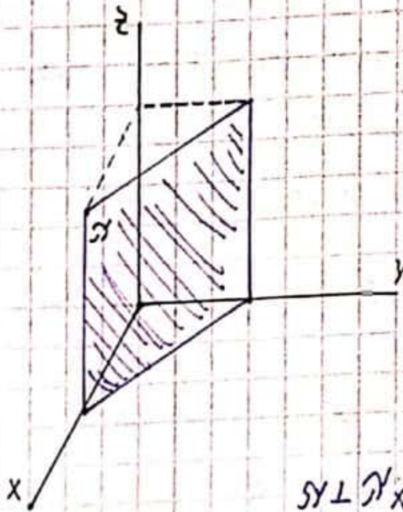
$\pi \perp \pi_{yz}$
$\pi \parallel$ eje x

$B = 0$ $\quad Ax + Cz + D = 0$



$\pi \perp \pi_{xz}$
$\pi \parallel$ eje y

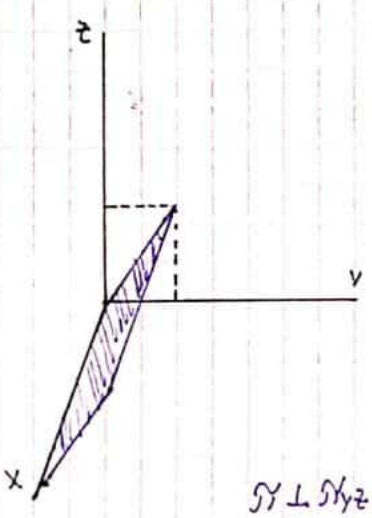
$C = 0$ $\quad Ax + By + D = 0$



$\pi \perp \pi_{xy}$
$\pi \parallel$ eje z

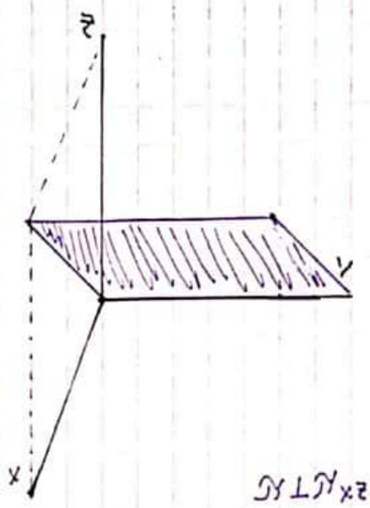
π pasa por el origen
π contiene el eje que no figura

$A, D = 0$ $\quad By + Cz = 0$



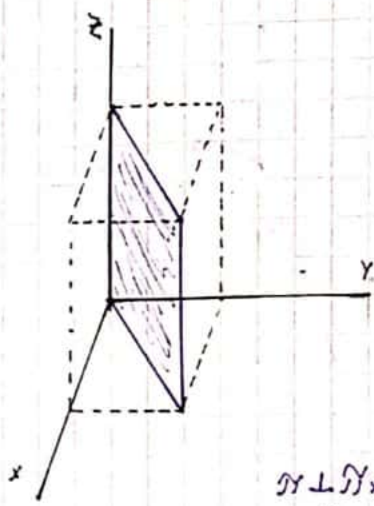
$\pi \perp \pi_{yz}$
$\pi \parallel$ eje x

$B, D = 0$ $\quad Ax + Cz = 0$



$\pi \perp \pi_{xz}$
$\pi \parallel$ eje y

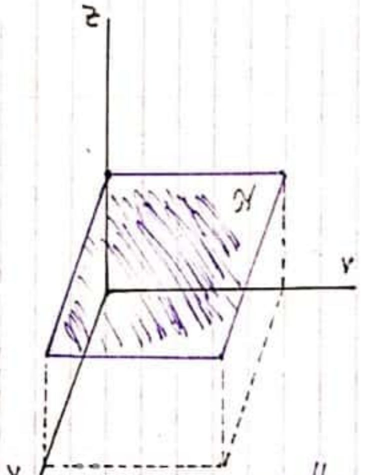
$C, D = 0$ $\quad Ax + By = 0$



$\pi \perp \pi_{xy}$
$\pi \parallel$ eje z

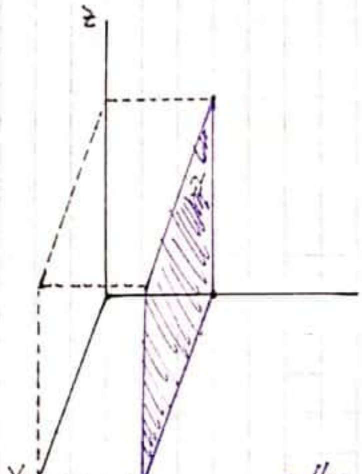
π // al plano que forman las variables que NO figuran
π ⊥ al eje de la variable que sí figura.

$A, B = 0$ $\quad Cz + D = 0$



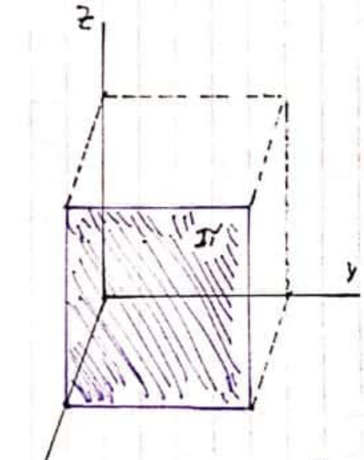
$\pi \parallel \pi_{xy}$
$\pi \perp$ eje z

$A, C = 0$ $\quad By + D = 0$



$\pi \parallel \pi_{xz}$
$\pi \perp$ eje y

$B, C = 0$ $\quad Ax + D = 0$



$\pi \parallel \pi_{yz}$
$\pi \perp$ eje x

- Familia o Haz de rectas:
  - Paralelos:

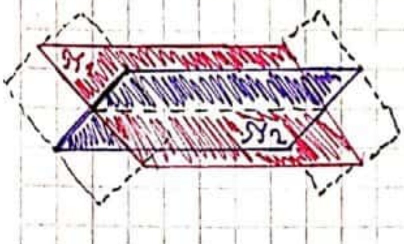
$$A_x + B_y + C_z + k = 0 \quad -\infty < K < \infty$$

→ el vector $\bar{n}$ es el mismo.

  - Concurrentes: (pasan por un punto)

$$K_1(x - X_1) + K_2(y - Y_1) + K_3(z - Z_1) = 0$$

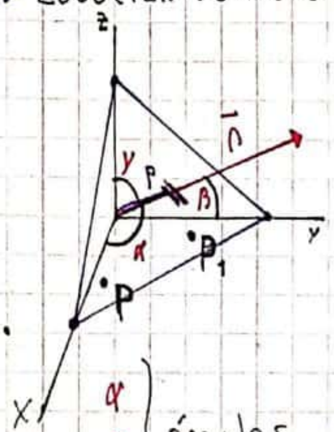
  - Que pasan por la recta intersección de otros dos:



$$\pi_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + K(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(son combinación Lineal) $\quad -\infty < K < \infty$

- Ecuación normal del plano



$\bar{n}$ → Vector desde el origen y perpendicular al plano
(A; B; C)

$$\overline{P_1P} \cdot \bar{n} = 0 \iff P_1P \perp \bar{n}$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

→ divido por $|\bar{n}|$

$$\frac{A}{|\bar{n}|}(x - x_1) + \frac{B}{|\bar{n}|}(y - y_1) + \frac{C}{|\bar{n}|}(z - z_1) = 0$$

α, β, γ } ángulos directores

$$\frac{A}{|\bar{n}|} = \cos\alpha \quad \frac{B}{|\bar{n}|} = \cos\beta \quad \frac{C}{|\bar{n}|} = \cos\gamma$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \underbrace{(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma)} = 0$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$$

→ de la ec. gen: $Ax + By + Cz + D = 0$ →

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

↳ elegir signo opuesto a D

Si $D = 0$. signo = C
Si $D = C = 0$ signo = B
Si $D = C = B = 0$ sig. = A

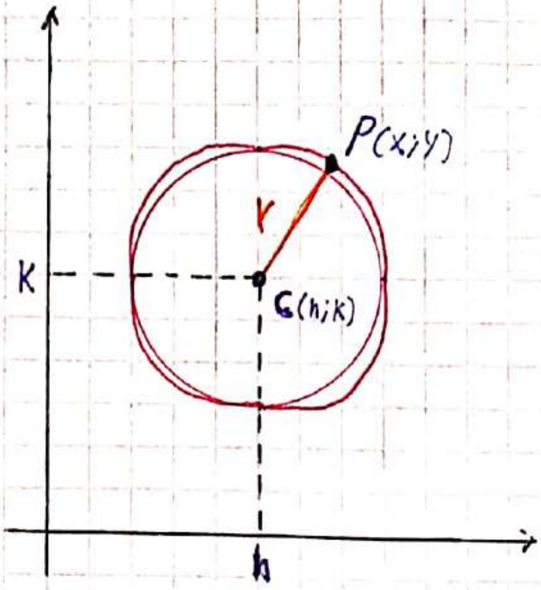
- dist entre un plano y un punto o dos planos paralelos

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P$$

$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- el plano está entre el origen y el punto } d ⊕
- el origen y el punto se encuentran del mismo lado } d ⊖

Cónicas: Circunferencia.-



$|\overline{CP}| = r$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Segunda ec. ordinaria.

Si $C(0,0)$:

$x^2 + y^2 = r^2$

Primer ec. ordinaria / ec. canónica

Desarollando de la segunda ec. ordinaria, se llega a la:

$Ax^2 + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$

ECUACIÓN GENERAL DE LAS CÓNICAS

$A = C$

$r^2 = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$

Sí $r = 0 \rightarrow$ Punto único en: $\left(-\frac{D}{2} ; -\frac{E}{2}\right)$

Sí $r < 0 \rightarrow$ No representa un lugar geométrico en $\mathbb{R}$

Sí $r > 0 \rightarrow$ Circunferencia con centro en $C\left(-\frac{D}{2} ; -\frac{E}{2}\right)$

y radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{-4F + D^2 + E^2}$

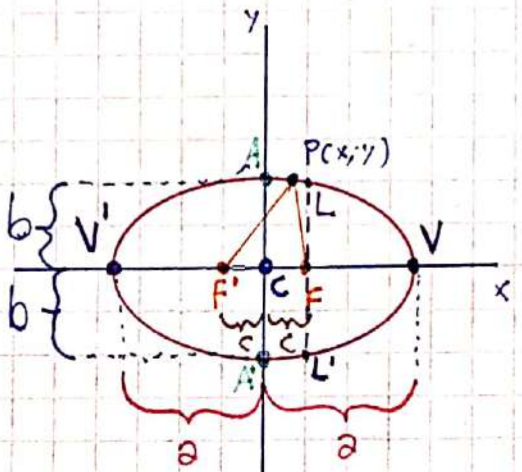
ELIPSE:

$|d_1 + d_2| = c \wedge c < \boxed{2a} \rightarrow$ dist. entre focos.

d_2: dist. P(x;y) al foco$_2$

d_1: dist. P(x;y) al foco$_1$

Eje Mayor = Eje focal



$|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$ Centro $C(0,0)$

F y F': Focos $\overline{F'F}$: distancia focal $= 2c$

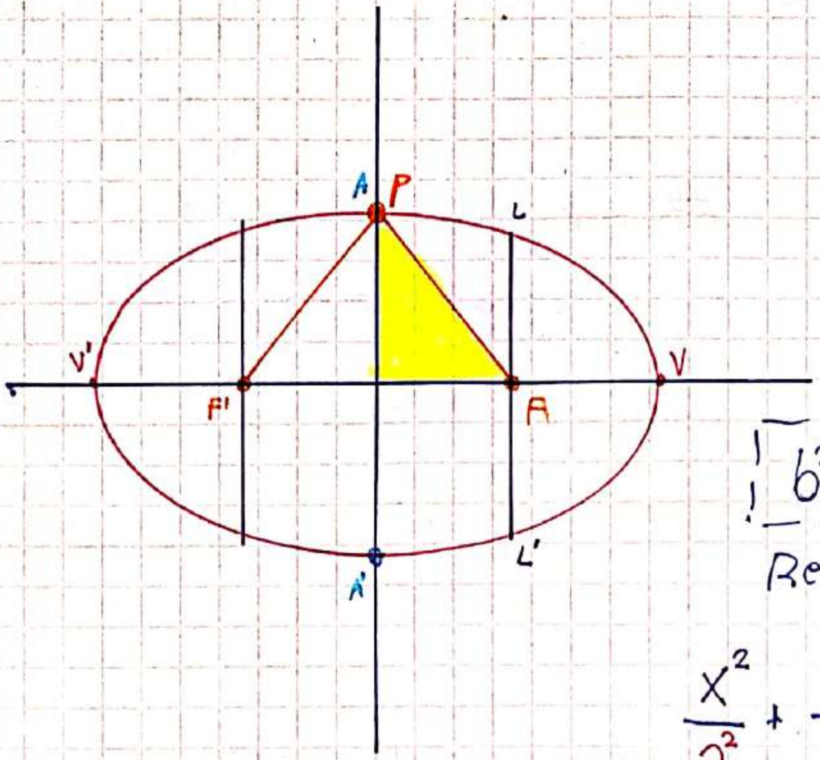
$F: (c ; 0)$ $V: (a ; 0)$

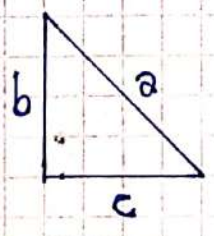
$F': (-c ; 0)$ $V': (-a ; 0)$

V y V': Vértices $\overline{V'V}$: eje mayor $= 2a$

$\overline{A'A}$: eje menor $= 2b$

$b^2 + c^2 = a^2$ $e = \frac{c}{a}$ $\overline{LL'}$: Lado Recto $= \frac{2b^2}{a}$





$$\boxed{b^2+c^2=a^2}$$

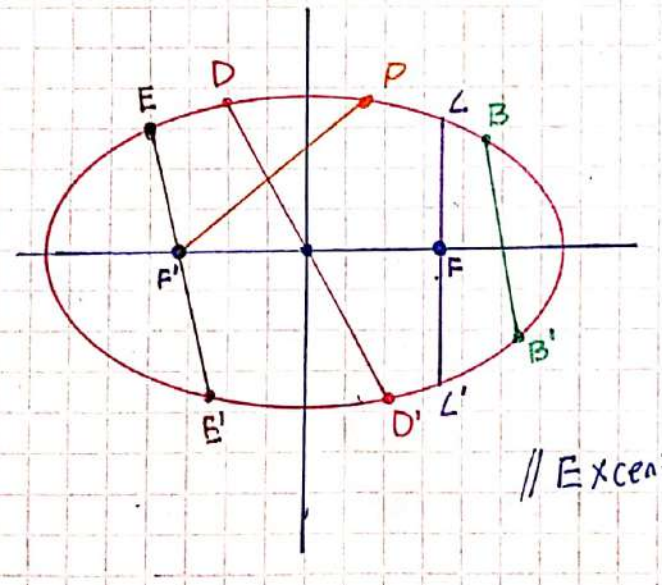
Rel. fundamental

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ 1° ec. ordinaria / ec. canónica

Despejando:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad ; \quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

$$-a\leqslant x\leqslant a \quad y \quad -b\leqslant y\leqslant b$$



$\overline{BB'}$: Cuerda

$\overline{EE'}$: Cuerda Focal

$\overline{DD'}$: Diámetro

$\overline{LL'}$: Lado Recto

$\overline{PF'}$: Radio Vector

// Excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}$$

sí $c\to a \to$

sí $c\to 0 \to 0$

$c<a \quad e<1 \quad 0<c<a$

sí $e=0$, tenemos circunferencia

sí el elipse es vertical, los elementos son los mismos, pero cambian sus coordenadas.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$ $a\to$ Valor mayor.

Con Centro C en $(h;k) \rightarrow \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Seg. ecuación Ordinaria

▪ multiplicar todo por a^2b^2 y despejar ec. general.

$$\underbrace{b^2}x^2 + \underbrace{a^2}y^2 \underbrace{-2b^2h}x \underbrace{-2a^2k}y + \underbrace{a^2k^2+b^2h^2-a^2b^2} = 0$$

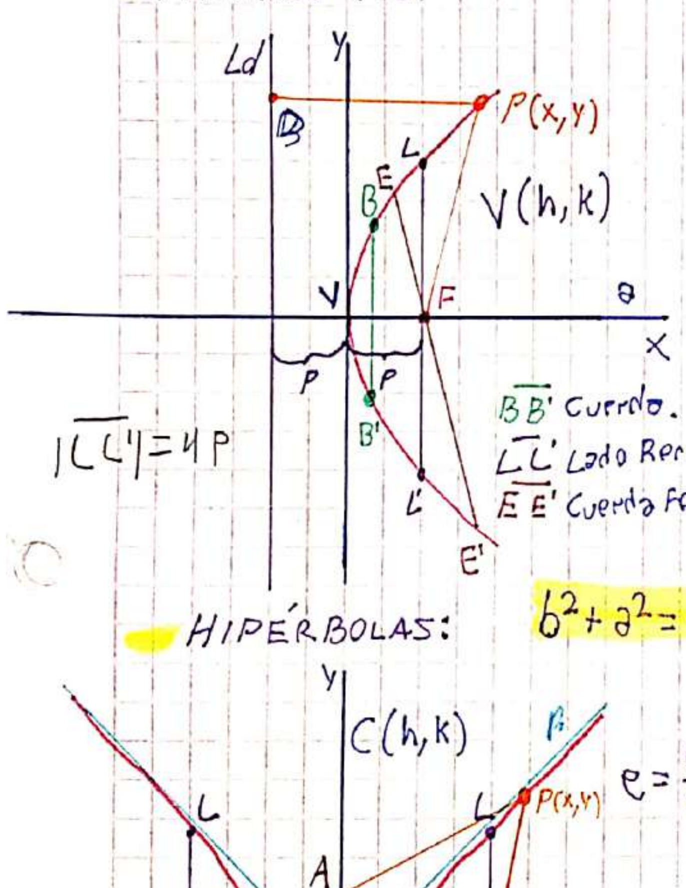
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

FORMA GENERAL:

Completar cuadrados:
$ax^2 + bx + C$
1. $a = 1$ (hacer factor com).
2. $C = \left(\frac{b}{2}\right)^2$
3. Result: $a\left(x^2 + \frac{b}{2}\right) - \frac{ab}{2}$

Sí $A \neq C$ pero son del mismo signo $+$ ó $-$, es una elipse.

PARÁBOLAS:



$|\overline{LL'}| = 4P$

$\overline{BB'}$ Cuerda.
$\overline{LL'}$ Lado Recto.
$\overline{EE'}$ Cuerda focal.

$|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

▸ El eje focal corresponde al término no - cuadrático.

▸ $(y/x)^2 = 4p\,(x/y)$

→ signo de p indica la dir. si $+$ → C ó U

▸ $[(y/x) - k]^2 = 4p((x/y) - h)$ P: $+$ $-$

▪ x^2 → ∪ ó ∩
▪ y^2 → (ó)

▸ ~~$Ax + Dx$~~

Ax^2 ó Cy^2 $+ Dx + Ey + F = 0$ (ec. general)

HIPÉRBOLAS:

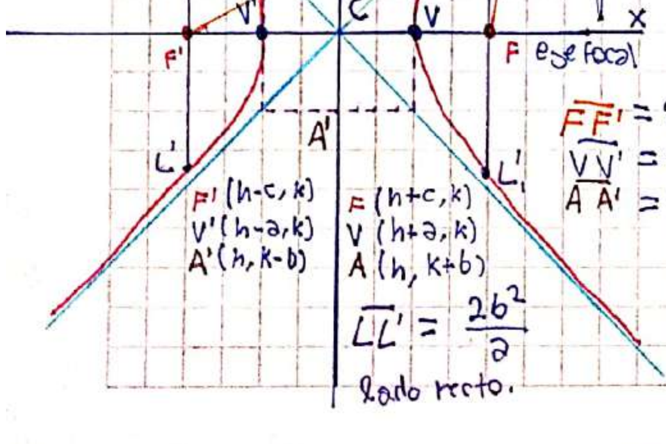
$b^2 + a^2 = c^2$

$||\overline{PF}| - |\overline{PF'}|| = 2a$

$\pm\dfrac{(x-h)^2}{a^2} \mp \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

▪ hipérbola horizontal
▪ hipérbola vertical

a^2 → debajo del término $+$



$e = \dfrac{c}{a} > 1$

▸ Si $(x^2) < 0$ → eje focal X, a^2 debajo de y^2

▸ Si $(y^2) < 0$ → eje focal y, a^2 debajo de x^2

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Siendo A y C de distinto signo.

$\overline{FF'} = 2c$
$\overline{VV'} = 2a$
$\overline{AA'} = 2b$

$\overline{LL'} = \dfrac{2b^2}{a}$ lado recto.

Asíntotas:

Si x^2 $+$:)(si y^2 $+$: ⌣⌢

$y - k = \pm\dfrac{b}{a}(x - h)$ $y - k = \pm\dfrac{a}{b}(x - h)$

Hipérbola equilátera/Rectangular: $a = b$

$4x^2 - 9y^2 = 36$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 9 \to a = 3$

$b^2 = 4 \to b = 2$

$C = (0, 0)$ / $a^2 + b^2 = c^2$

$c^2 = 13 \to c = \sqrt{13}$

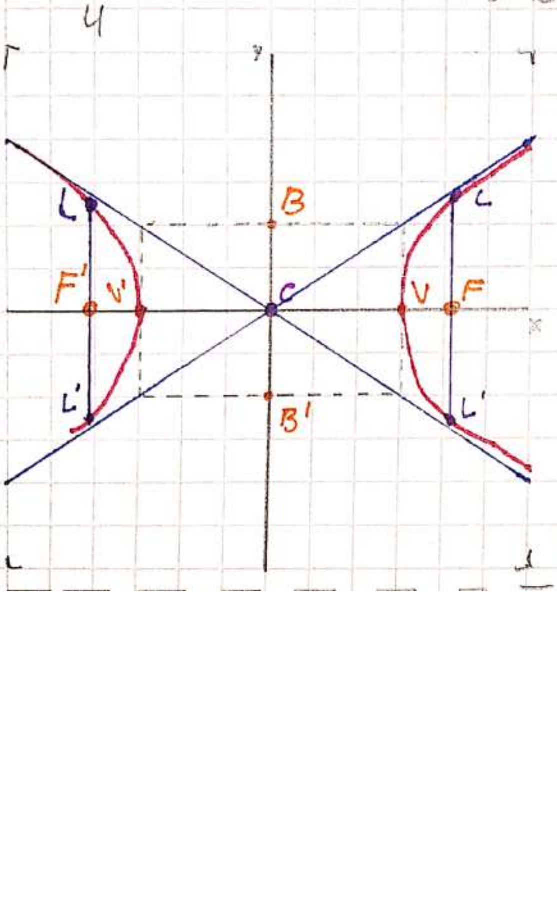
$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

$e > 1$

$V(3, 0)$ $V'(-3, 0)$

$B(0, 2)$ $B'(0, -2)$

$F(\sqrt{13}, 0)$ $F'(-\sqrt{13}, 0)$



Long. Eje transverso: $|\overline{VV'}| = 2a = 6$

Long. " conjugado: $|\overline{BB'}| = 2b = 4$

LR: $|\overline{LL'}| = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{8}{3}$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{2}{3} x$

Espacios Vectoriales: Álgebra:

V → "EV" conj. no vacío de objetos donde están def:
las operaciones "suma" y "prod. por un escalar" que satisfacen
los sig. 10 AXIOMAS:

① sí "u" y "v" ∈ V → u+v ∈ V
- Ley de composición Interna
|SUMA|

② sí u y v ∈ V → u+v = v+u
|CONMUTATIVA|

③ sí u, v, w ∈ V → (u+v)+w = u+(v+w)
|ASOCIATIVA|

④ sí "0" ∈ V → ∀u ∈ V, u+0 = 0+u = u
|ELEMENTO NEUTRO| para todo

⑤ ∀u ∈ V, ∃ -u ∈ "V": u+(-u) = (-u)+u = 0
para todo |ELEMENTO INVERSO|

|k: k es un escalar|

⑥ sí u ∈ V y k es un escalar → ku ∈ V
- LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA
|PRODUCTO POR ESCALAR|

⑦ sí u ∈ V y k y m son escalares, → k(mu) = km(u)
|ASOCIATIVA|

⑧ sí u, v ∈ V y k es un escalar, → k(u+v) = ku + kv
|DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA DE VECTORES|

⑨ sí u ∈ V, y k, m son escalares, → (k+m)u = ku + mu
|DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA DE ESCALARES|

⑩ ∀u ∈ V → 1u = u
|ELEMENTO NEUTRO|

→ Subespacios vectoriales:

W será un subespacio vectorial de V si cumple con los 10 AXIOMAS.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES:

1. EL vector "0" de V está en W
2. Se cumple el 1er Axioma: "LCI → SUMA"
3. Se cumple el 6to Axioma: "LCE → PROD. x. ESCALAR"
4. Se cumple la ley del elemento Inverso para la suma

Combinación Lineal:

EL vector w es C.L. de los vectores: $v_1, v_2, \dots, v_n$ sí se puede expresar como:

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

Siendo k_i los escalares

Conjunto Generador:

Los vectores: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ generan a V si todo otro vector de V se puede expresar como CL de ellos:

$\forall v \in V, \exists a_1, a_2, \dots, a_n$ tal que → escalares.

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

Siendo a_i escalares.

Base

Dado un V y un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in V$, S es base de V si cumple:

- S es Linealmente Indep.
- S genera a V

$$0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

Siendo a_i escalares.

En R^n se define un conjunto "S"

$S = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ siendo:

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$

el vector "V" en R^n se puede expresar como CL, o: $v = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n$ ∴

S genera a R^n y S es una base para R^n

|base canónica o estándar para R^n|

DIMENSIÓN: Cant. Vectores L.I. en una base.

$R^2: S = \{e_1, e_2\}$ $R^3: S\{e_1, e_2, e_3\}$

- Todo conjunto de n vectores ~~en~~ Linealmente Indep. ~~genera~~ en R^n genera a R^n
- Todo conjunto de n vectores Linealmente Indep. en R^n es una base de R^n

V → espacio vectorial "V"

DIMENSION (Continuación):

Si $S = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es una base para V, todo conjunto con más de n vectores es LINEALMENTE DEPENDIENTE.

- ESPACIOS RENGLONES (FILAS) y/o columnas y E.V. Matriciales:

Dado $A_{m \times n}$:

- Espacios Renglones (Filas):

$$\left.\begin{array}{l} r_1 : (a_{11} \quad a_{12} \ldots \quad a_{1n}) \\ r_2 : (a_{21} \quad a_{22} \ldots \quad a_{2n}) \\ r_3 : (a_{m1} \quad a_{m2} \ldots \quad a_{mn}) \end{array}\right\}$$

"m" vectores fila, con "n" elementos

Subespacio R^n generado por "m" vectores Fila de A

- Espacio columnas:

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{vmatrix} \quad C_2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{vmatrix} \quad C_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{vmatrix} \Bigg\}$$

"n" vectores columna, con "m" elementos

Subespacio R^m generado por "n" vectores col. de A

- las op. elementales no alteran el espacio de renglones de una matriz. (sobre renglones/filas)

- Espacio de columnas de $A :=$ espacio de filas de A^T

- el E. de renglones y columnas de A tienen la misma Dimensión que A

- Dimensión de A = Rango de A (# vectores de la base)

- $A_{n \times n}$ y tiene rango "n",
  - └ A es invertible.
  - └ $\det(A) \neq 0$
  - └ vectores fila/columna de A son L.I.
  - └ $A.x = 0$ y $A.x = b$ tienen solución.

Coordenadas:

Si $S = \{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \dots, \bar{V}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V

todo otro vector $\bar{u}$ de dicho espacio vectorial V se puede expresar como combinación lineal de $V_1, V_2, \dots V_n$.

$\bar{U} = C_1\bar{V}_1 + C_2\bar{V}_2 + C_3\bar{V}_3 + \dots + C_n\bar{V}_n$ / $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ son las coord. ~~[illegible]~~ del vector $\bar{u}$ relativas a la base "S"

MATRIZ:

$$\underbrace{[\,\underset{\text{vec.}}{u}\,]_{\underset{\text{Base}}{S}}} = \underset{\text{coord.}}{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}}$$

VECTOR:

$$(u)_S = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$$

$\bar{v} \in V$

Cambio de base:

$\longrightarrow [\bar{v}]_B$

$\longrightarrow [\bar{v}]_{B'}$

$[\bar{v}]_{B'} = P[\bar{v}]_B$

$P: B \Rightarrow B'$

- P es invertible.
- $P: B \rightarrow B'$
- $P^{-1}: B' \rightarrow B$

$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ $\quad B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$

$\bar{U}_1 = a\bar{w}_1 + b\bar{w}_2$

$\bar{U}_2 = c\bar{w}_1 + d\bar{w}_2$

$\longrightarrow$

$[\bar{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$[\bar{v}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

→ expresamos $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ como C.L. de $\bar{w}_1, \bar{w}_2$, y tomamos nota de los escalares, que se denominan coordenadas, y se utiliza de la sig. manera:

$$\bar{v} = K_1(aw_1 + bw_2) + K_2(cw_1 + dw_2) = (K_1a + K_2c)\bar{w}_1 + (K_1b + K_2d)\bar{w}_2$$

$$[\bar{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} K_1a + K_2c \\ K_1b + K_2d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{[\bar{v}]_B} \quad A$$

MATRIZ DE TRANSCICIÓN de la base B a la base B' $\longrightarrow P$

→ Si ya tenemos la matriz P, podemos hacer el sentido inverso:

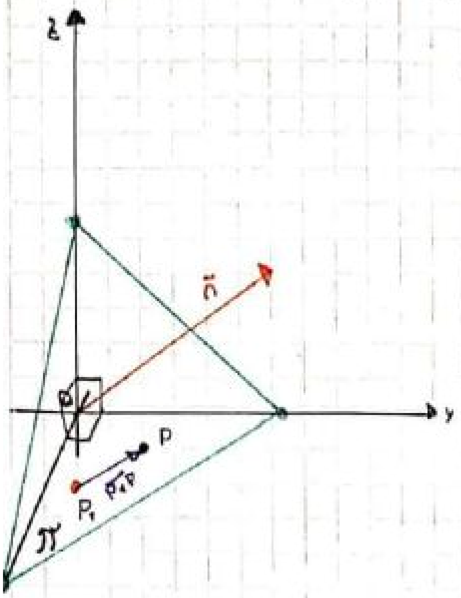
$$[\bar{v}]_B = \underbrace{P^{-1}}_{\text{se llama matriz "Q"}} \cdot [\bar{v}]_{B'}$$

Índice

Plano

Ecuación Vectorial

▸ Ecuación Vectorial del plano determinada por un punto y la dirección de su normal:



P_1 → Punto Conocido $(x_1; y_1; z_1)$

P → Punto genérico $(x; y; z)$

pertenecen al plano "π"!

$\overline{P_1P}$, $\bar{n}(A; B; C)$ → Vector normal ($\perp$ al plano)

$$\overline{P_1P} \perp \bar{n} \Rightarrow \boxed{\overline{P_1P} \cdot \bar{n} = 0}$$

1 Ecuación Vectorial del Plano

Ecuación general o implícita

▸ Ecuación General o Implícita:

$$\overline{P_1P} \cdot \bar{n} = 0 = (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) \cdot [(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}] = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$Ax - Ax_1 + By - By_1 + Cz - Cz_1 = 0$$

$$Ax + By + Cz \underbrace{- (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}_{D} = 0$$

A, B, C: enteros

A: Positivo (+)

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Ecuación General/Implícita

Ecuación segmentaria

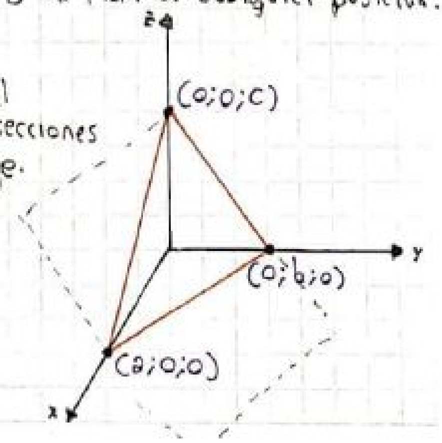
▶ ECUACIÓN SEGMENTARIA

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ siendo $A, B, C, D \neq 0$ → Plano en cualquier posición.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-D}{A} = a \quad \boxed{(a;0;0)} \\ y = \dfrac{-D}{B} = b \quad \boxed{(0;b;0)} \\ z = \dfrac{-D}{C} = c \quad \boxed{(0;0;c)} \end{cases}$$

a, b y c → dist. desde el origen hasta las intersecciones del plano con cada eje.

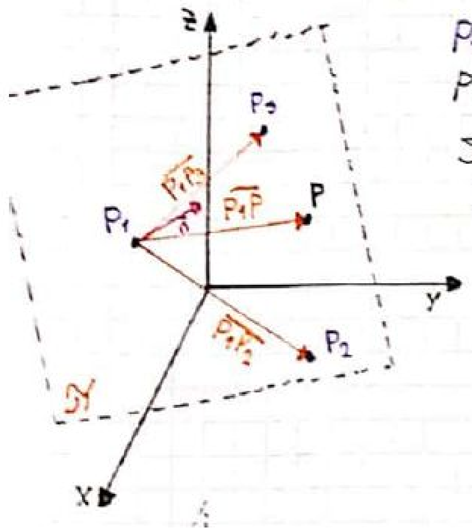
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Ecuación del plano determinado por 3 puntos

▶ ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS:

→ Por tres puntos no alineados pasa un único plano:



$P_1(x_1; y_1; z_1)$; $P_2(x_2; y_2; z_2)$; $P_3(x_3; y_3; z_3)$

$P(x; y; z)$

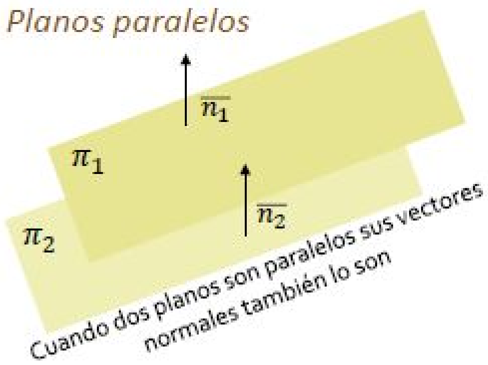
Si los 3 vectores: $\overline{P_1P}$; $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$ son coplanares, su producto mixto es 0.

$$\boxed{\overline{P_1P} \cdot \left(\overline{P_1P_2} \wedge \overline{P_1P_3}\right) = 0}$$

Ecuación

$\bar{n} = \left(\overline{P_1P_2} \wedge \overline{P_1P_3}\right)$ → Normal del plano

Planos paralelos



$Si\ \pi_1 // \pi_2 \ \rightarrow\ \overline{n_1} // \overline{n_2}$

Entonces sus componentes son múltiplos escalares y el **producto vectorial es igual a cero**

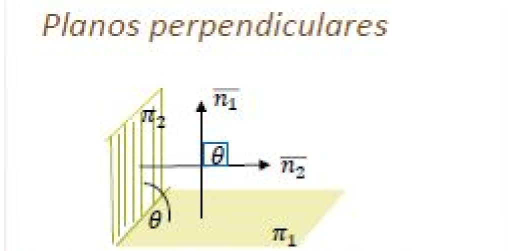
$$(A_1;\ B_1; C_1) \ = \ \lambda(A_2;\ B_2; C_2)$$

Y se cumple que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Si π_1 es coincidente con π_2

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Planos perpendiculares



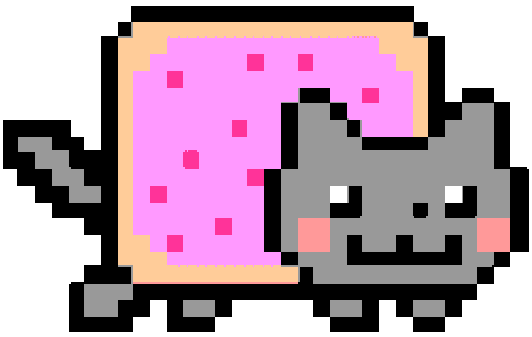
Cuando dos planos son perpendiculares, Sus vectores normales también los son

$\text{Si}\ \pi_1 \perp \pi_2 \ \rightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2}$

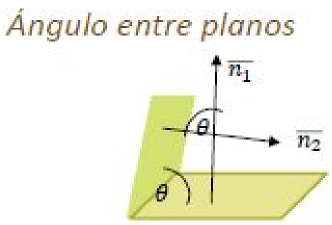
$Si\ \ \theta = 90° \ \rightarrow\ \cos\ 90° = 0$

Entonces el **producto escalar** de sus normales **será igual a cero**

$$\overline{n_1} \,.\, \overline{n_2} = \ A_1A_2 + \ \ B_1B_2 + \ C_1C_2 = 0$$



Ángulo entre planos



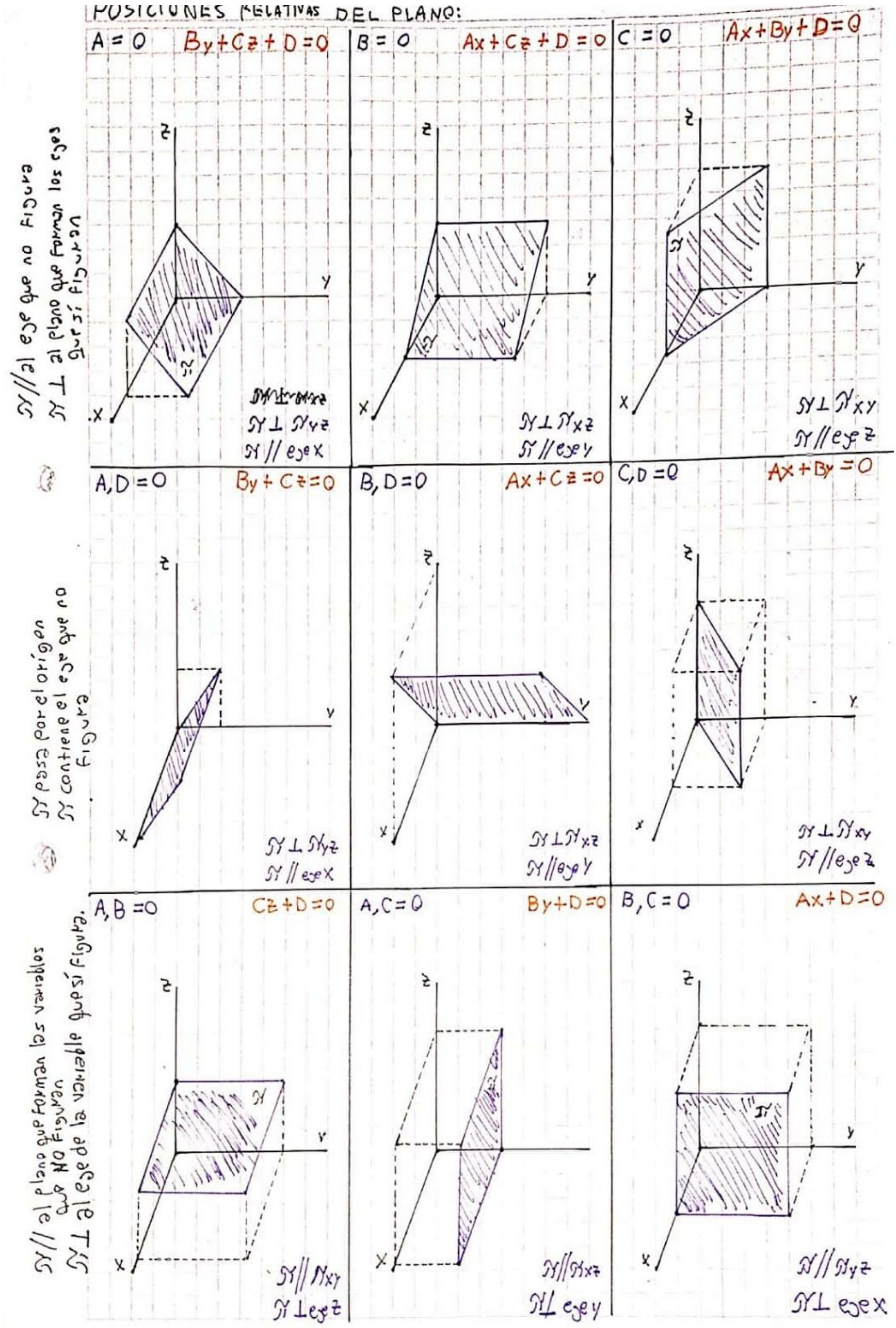
El ángulo que forman los planos , Es el mismo que forman sus vectores normales

Con el producto escalar podemos calcularlo

$$\overline{n_1} \,.\, \overline{n_2} \ = \ |\overline{n_1}||\overline{n_2}|\ \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + \ B_1B_2\,. + C_1C_2\,.}{\sqrt{A_1^2 \ + \ B_1^2 + \ C_1^2}\ .\ \ \sqrt{A_2^2 \ + \ B_2^2 + \ C_2^2}}$$

Posiciones Relativas del plano



Familias de planos

Es un conjunto de planos con una propiedad común

Familia o haz de planos paralelas

$$Ax + By + Cz + k = 0$$

$$k \, \varepsilon \, R$$

Para cada valor de "k" se tiene un plano paralelo
El vector normal es el mismo - $\bar{n}\,(A; B; C)$

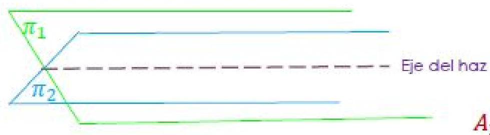
Familia o haz de planos que pasan por un punto

$$k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0) + k_3(z - z_0) = 0$$

Pasan por un punto $P_0\,(x_0; y_0; z_0)$
Y cambian las componentes del vector normal

Familia o haz de planos que pasan por la intersección de otros dos

ntersección entre dos planos no paralelos ni coincidentes definen una recta y los infinitos planos que pasan por ella definen el haz



$$\pi_1 \;:\; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 \;:\; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

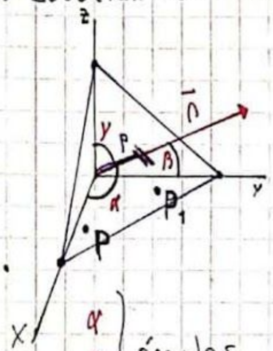
Siendo el haz de planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$$-\infty < k < \infty$$

Ecuación Normal

Ecuación normal del plano



α, β, γ } ángulos directores

$\bar{n}$ → Vector desde el origen y perpendicular al plano $(A;B;C)$

$$\overline{P_1P} \cdot \bar{n} = 0 \iff P_1P \perp \bar{n}$$

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

→ divido por $|\bar{n}|$

$$\frac{A}{|\bar{n}|}(x-x_1) + \frac{B}{|\bar{n}|}(y-y_1) + \frac{C}{|\bar{n}|}(z-z_1) = 0$$

$$\frac{A}{|\bar{n}|} = \cos\alpha \quad \frac{B}{|\bar{n}|} = \cos\beta \quad \frac{C}{|\bar{n}|} = \cos\gamma$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \underbrace{(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma)}_{} = 0$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

→ de Ec. gen: $Ax+By+Cz+D=0$ →

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

↳ elegir signo opuesto a D

Sí $D=0$. signo $= C$

Sí $D=C=0$ signo $= B$

Sí $D=C=B=0$ sig. $= A$

▶ dist. entre un plano y un punto o dos planos paralelos

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

$$d = \frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

▶ el plano está entre el origen y el punto } d ⊕

▶ el origen y el punto se encuentran del mismo lado } d ⊖

Cónicas

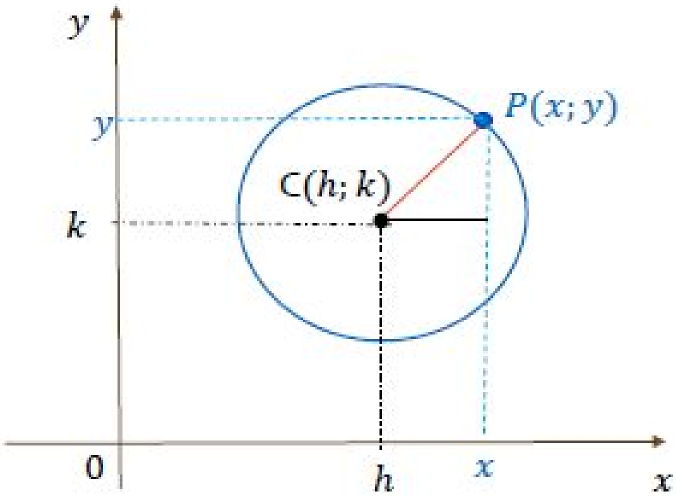
Ecuación general:

$$\underbrace{Ax^2}_{\text{Términos cuadráticos}} + \overbrace{Bxy}^{\text{Término rectangular}} + \underbrace{Cy^2} + \overbrace{Dx + Ey}^{\text{Términos lineales}} + \underbrace{F}_{\text{Término independiente}} = 0$$

- Es una ecuación de segundo grado con dos variables.
- El término rectangular indica un giro.

<table>
<tr><th>Sí</th><th>A = C</th><th>A = 0 o C = 0 (No simultáneamente)</th><th>A y C son del mismo signo</th><th>A y C son de distinto signo</th></tr>
<tr><td>X^2 POSITIVO / EXISTE</td><td rowspan="4">CIRCUNFERENCIA
e = 0</td><td>PARÁBOLA
Id // eje x
E.parábola ⊥ eje x
e = 1</td><td rowspan="2">INDIFERENTE</td><td>HIPÉRBOLA
Eje focal // x
e > 1
"a" debajo de x</td></tr>
<tr><td>Y^2 POSITIVO / EXISTE</td><td>PARÁBOLA
Id // eje y
E.parábola ⊥ eje y
e = 1</td><td>HIPÉRBOLA
Eje focal // y
e > 1
"a" debajo de y</td></tr>
<tr><td>A > C</td><td rowspan="2">INDIFERENTE</td><td>ELIPSE VERTICAL
"b" > "a"
0 > e < 1
"a" debajo de y</td><td rowspan="2">INDIFERENTE</td></tr>
<tr><td>C > A</td><td>ELIPSE HORIZONTAL
"a" > "b"
0 > e < 1
"a" debajo de x</td></tr>
</table>

Circunferencia



Definición:

Es el lugar geométrico de un conjunto de puntos en un plano que conservan siempre una **distancia constante** de un **punto fijo**

Leyenda:
distancia constante: Radio
punto fijo: Centro

Del gráfico a la ecuación

Fijate

$|\overline{CP}| = r$

"r" es la hipotenusa del triangulito

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

Pitágoras!

↓

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ Segunda ecuación ordinaria

Caso particular

$C(0;0) \rightarrow r^2 = x^2 + y^2$ Primer ecuación ordinaria
Forma Canónica

Que representa el radio

$Si\ r = 0 \quad \rightarrow \quad Un\ punto$

$Si\ r < 0 \quad \rightarrow \quad No\ representa\ un\ lugar\ geométrico\ en\ R$

$Si\ r > 0 \quad \rightarrow \quad Circunferencia\ con\ centro\ C\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Forma ordinaria -> Forma general

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Partimos de la segunda ecuación ordinaria

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

Desarrollando los cuadrados e igualando a cero

$$\underbrace{\ }_{A}x^2 + \underbrace{\ }_{C}y^2 \underbrace{- 2hx}_{D} \underbrace{- 2ky}_{E} + \underbrace{h^2 + k^2 - r^2}_{F} = 0$$

Reacomodando la expresión

En forma análoga a la ecuación general que vimos antes!

Finalmente

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{donde} \quad A = C$$

Forma general de la Circunferencia

Forma general -> Forma ordinaria

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Partimos de la forma general de la ecuación de la circunferencia

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

Completamos cuadrados para "x" y para "y"

Con $\left(\frac{D}{2}\right)^2$ y $\left(\frac{E}{2}\right)^2$ respectivamente

Sumamos a ambos miembros así obtenemos una ecuación equivalente

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

Expresando los cuadrados de cada uno de los binomios

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Sacando denominador común en el segundo miembro

Finalmente $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = r^2$

OBSERVACIÓN

$Si\ r = 0 \quad \rightarrow \quad Un\ punto$

$Si\ r < 0 \quad \rightarrow \quad No\ representa\ un\ lugar\ geométrico\ en\ R$

$Si\ r > 0 \quad \rightarrow \quad Circunferencia\ con\ centro\ C\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Elipse

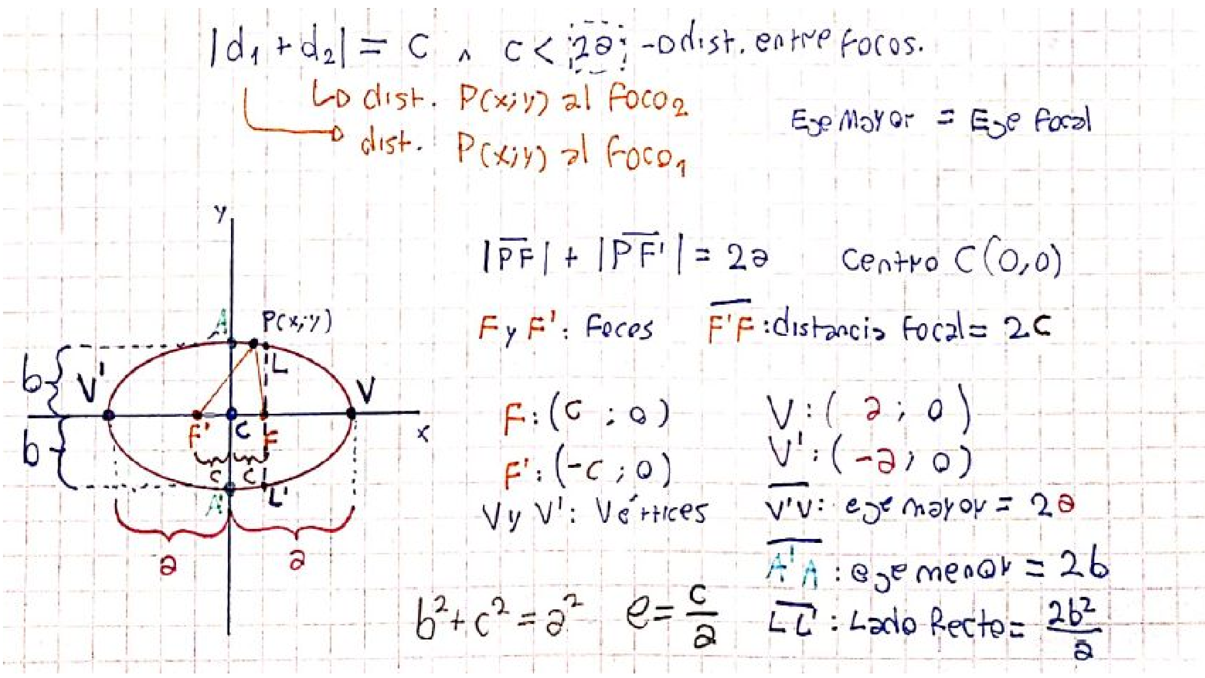
Definición

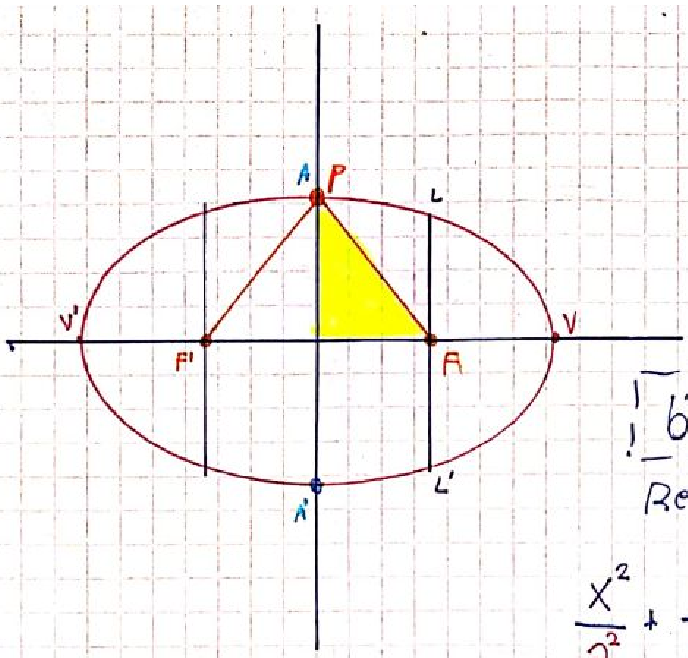
Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de manera que la **suma de sus distancias a dos puntos fijos** (focos) de ese plano **se mantiene constante** y mayor que la distancia entre ellos (2a).

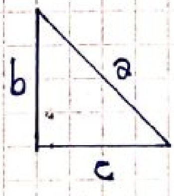
Relación fundamental: $b^2 + c^2 = a^2$ **Excentricidad:** $e = \frac{c}{a} < 1$

Lado Recto: $L_R = \frac{2b^2}{a}$ **Si A > C, es una elipse VERTICAL**

Vertical	Horizontal
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ "a" debajo de Y Eje focal // eje Y	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ "a" debajo de X Eje focal // eje X



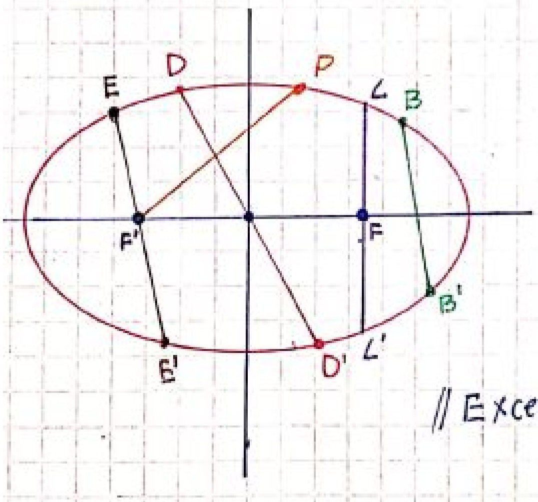




$$\boxed{b^2+c^2=a^2}$$

ReL. fundamental

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ 1º ec. ordinaria / ec. canónica



$\overline{BB'}$: Cuerda

$\overline{EE'}$: Cuerda Focal

$\overline{DD'}$: Diámetro

$\overline{LL'}$: Lado Recto

$\overline{PF'}$: Radio Vector

// Excentricidad:

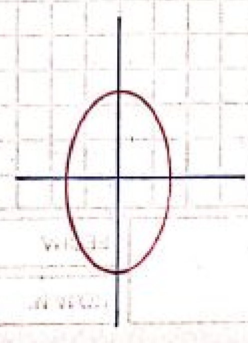
$$e=\frac{c}{a}$$

sí $c \to a \to$ ⬭

sí $c \to 0 \to$ ○

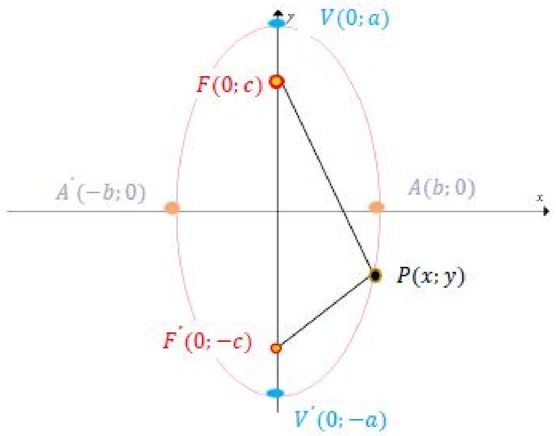
$c<a$ $\quad e<1 \quad 0<c<a$

sí $e=0$, tenemos circunferencia



sí el elipse es vertical, los elementos son los mismos, pero cambian sus coordenadas.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$ $a \to$ Valor mayor.



Los elementos son los mismos que en el caso anterior

Fijate como cambiaron las coordenadas!

Además $b > a$ *entonces* $Eje\ focal\ coincidente\ con\ el\ eje\ y$

Se puede demostrar que la ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Siiiiiii, es parecida a la anterior!

Horizontal con C = $(h;k)$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

"a" debajo de X

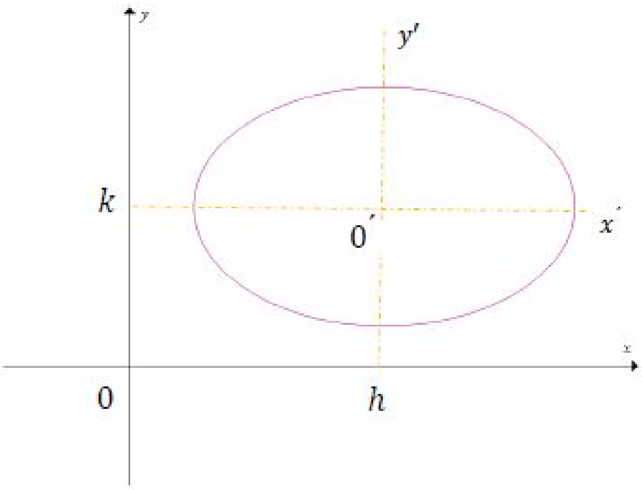
Eje focal // eje X

Coordenadas:

$V'(h-a;k)$ y $V(h+a;k)$

$F'(h-c;k)$ y $F(h+c;k)$

$A'(h;k-b)$ y $A(h;k+b)$



$0' = C(h;k)$

Trasladamos los ejes coordenados "x" e "y" de modo que coincidan con el nuevo centro (h; k)

Entonces

$x = x' + h \rightarrow x' = x - h$

$y = y' + k \rightarrow y' = y - k$

Reemplazando en la Primer Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Reemplazando nuevamente

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Segunda Ecuación Ordinaria

Vertical con C = $(h;k)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

"a" debajo de Y

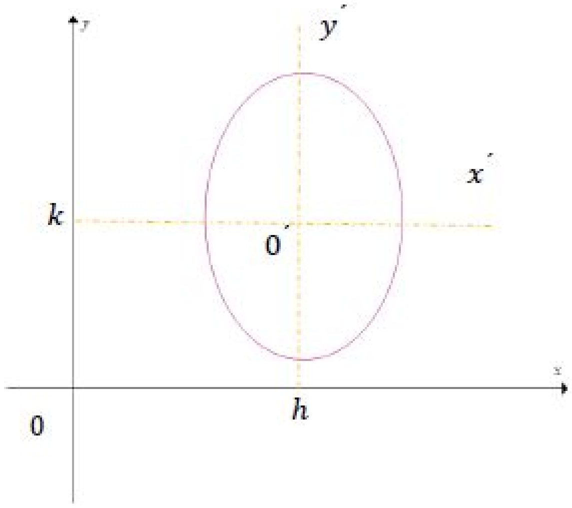
Eje focal // eje Y

Coordenadas:

$V'(h;k-a)$ y $V(h;k+a)$

$F'(h;k-c)$ y $F(h;k+c)$

$A'(h-b;k)$ y $A(h+b;k)$



La traslación se realiza de la misma forma
Y nos queda:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Segunda Ecuación Ordinaria

Forma ordinaria -> Forma general

Partimos de	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
Multiplicamos la ecuación por a^2b^2	$\frac{(x-h)^2\ a^2b^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2\ a^2b^2}{b^2}=a^2b^2$
Simplificando	$(x-h)^2\ b^2+(y-k)^2\ a^2=a^2b^2$
Desarrollando los cuadrados	$(x^2-2hx+h^2).b^2+(y^2-2ky+k^2).a^2=a^2b^2$
Distribuyendo e igualando a cero	$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2-a^2b^2=0$
Reordenando la expresión según la ecuación general	$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$
Ecuación General de la Elipse A y C de igual signo	$\boldsymbol{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$

Con Centro C en $(h;k) \rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Seg. ecuación Ordinaria

multiplicar todo por a^2b^2 y despejar ec. general.

$$\underbrace{b^2}x^2 + \underbrace{a^2}y^2 \underbrace{- 2b^2h}x \underbrace{- 2a^2k}y + \underbrace{a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2} = 0$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

FORMA GENERAL:

Completar cuadrados:

$ax^2 + bx + c$

1. $a = 1$ (hacer factor com).
2. $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$
3. Result: $a\left(x^2 + \frac{b}{2}\right) - \frac{ab}{2}$

Sí $A \neq C$ pero son del mismo signo $+$ ó $-$, es una elipse.

Forma general -> Forma ordinaria

Paso de la ecuación general a la ecuación ordinaria

Partimos del caso	$4x^2+2y^2+2x-y-6=0$
Agrupamos los términos según las variables e igualamos a 6	$4x^2+2x+2y^2-y=6$
Sacamos factor común 4 para la variable "x" y factor 2 para la variable "y"	$4.\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+2.\left(y^2-\frac{1}{2}y\right)=6$
Determinamos los términos respectivos que van a formar los cuadrados perfectos	Para x $\rightarrow$ $\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ Para y $\rightarrow$ $\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$
Armamos teniendo en cuenta el factor que acompaña a cada uno de los términos.	$4.\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+2.\left(y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}\right)=6+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
Formando los cuadrados de los binomios respectivos	$4.\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+2.\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{51}{8}$
Dividiendo por $\frac{51}{8}$ la ecuación	$\frac{4.\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{51}{8}}+\frac{2.\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{51}{8}}=\frac{\frac{51}{8}}{\frac{51}{8}}$
Finalmente	$\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{51}{32}}+\frac{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{51}{16}}=1$

Hipérbola

Definición

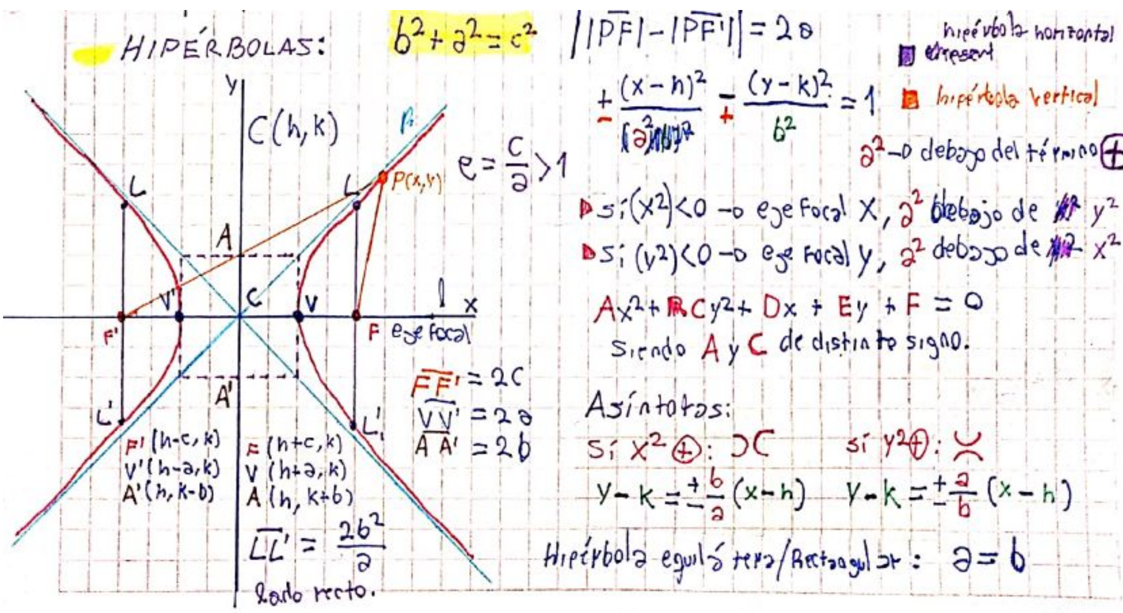
Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de manera que **el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos** (focos) del plano se **mantiene constante y menor que la distancia entre dichos puntos**.
En la ecuación general de la hipérbola si el término **X^2** y el término **INDEPENDIENTE** tienen distinto signo, la hipérbola tiene forma **)(** sin importar si el término **X^2** es **NEGATIVO** o **POSITIVO**

Relación fundamental: $b^2 + a^2 = c^2$ **Excentricidad:** $e = \frac{c}{a} > 1$

Lado Recto: $L_R = \frac{2b^2}{a}$ **Eje trasverso:** $|VV'| = 2a$

Eje conjugado: $|AA'| = 2b$

Vertical	**Horizontal**
Término Y^2 Positivo $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ Eje trasverso o focal // eje y Eje conjugado $\perp$ eje y Ec. Ao: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$ No está definida para: $-a < y < a$	Término X^2 Positivo $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Eje trasverso o focal // eje x Eje conjugado $\perp$ eje x Ec. Ao: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$ No está definida para: $-a < x < a$



Horizontal con C = (0,0)

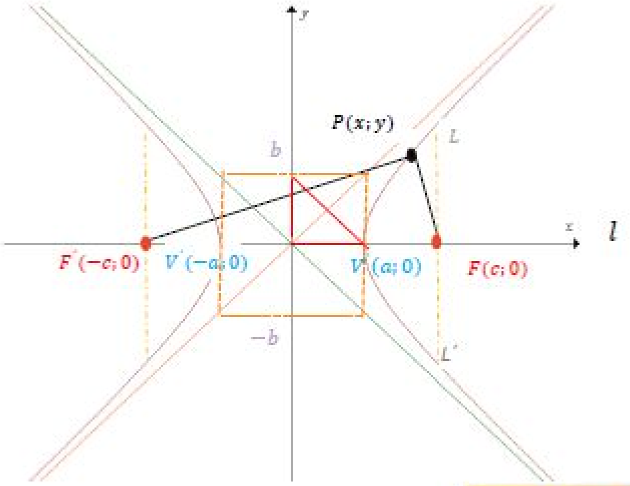
Hipérbola con centro en el origen de coordenadas y eje coincidente con el eje coordenado “x”

Término X^2 Positivo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eje trasverso sobre eje x

Ec. Ao: $y = \pm \frac{b}{a}x$



$l: Eje\ focal$

$F\ y\ F': Focos$

$\overline{FF'}: Distancia\ focal = 2c$

$V\ y\ V': Vértices$

$\overline{V'V}: Eje\ transverso = 2a$

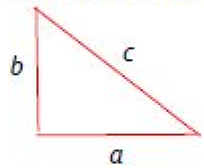
$\overline{AA'}: Eje\ conjugado = 2b$

$P(x; y)$: *Punto genérico*

$\overline{LL'}: Lado\ recto = \frac{2\,b^2}{a}$

$Asíntotas: \quad y = \pm \frac{b}{a} x$

Relación Fundamental



$$a^2 + b^2 = c^2$$

El punto $P(x; y)$ pertenece a la hipérbola, entonces, debe cumplir con la definición	$\left\| \left\|\overline{PF}\right\| - \left\|\overline{PF'}\right\| \right\| = 2a$
Considerando el Teorema de Pitágoras para el cálculo de dichos segmentos, reemplazando nos queda	$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a$
… … … … …	… … …
Realizando una serie de pasos algebraicos, llegamos a	$x^2 (c^2 - a^2) - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)$
Teniendo en cuenta la relación fundamental donde $a^2 + b^2 = c^2$ despejando $b^2 = c^2 - a^2$, luego	$x^2 b^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$
Dividiendo la ecuación por $a^2 b^2$ y simplificando	$\frac{x^2 b^2}{a^2 b^2} - \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}$
Ecuación canónica o Primer ecuación ordinaria	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Los vemos en base a la ecuación anterior	
Ecuación canónica o Primer ecuación ordinaria	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Las coordenadas de los vértices son $V'(-a; 0)$ **y** $V(a; 0)$ pues	$Si\ x = -a \quad o \quad x = a \quad \rightarrow \quad y = 0$
Intersección con el eje "y" No existe.	
Simetría La hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes coordenados y al origen	
Centro de la hipérbola Punto medio entre focos. $C(0; 0)$	
La hipérbola no está definida para los valores de x : $-a < x < a$	
Si despejamos $y \rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$	Si despejamos $x \rightarrow x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$
Ordenada del foco $Si \quad x = \pm c \quad \rightarrow$	$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$
Longitud del lado recto	$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \rightarrow \overline{LL'} = \frac{2\,b^2}{a}$
Asíntotas Tiene dos asíntotas con ecuación $y = \pm\frac{b}{a}x$	**Ramas** Tiene dos ramas
Excentricidad: Relación entre "c" y "a"	$e = \frac{c}{a} > 1 \quad pues \quad c > a$

Vertical con C = (0,0)

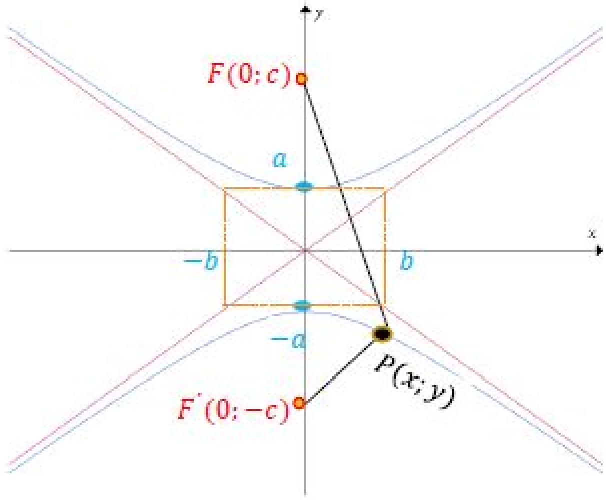
Centro en el origen y eje coincidente con el eje coordenado “y”

Término Y^2 Positivo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Eje trasverso sobre eje y

Ec. Ao: $y = \pm \frac{a}{b}x$



Los elementos son los mismos que en el caso anterior

Fíjate cómo cambian las coordenadas!

Se puede demostrar que la ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica o
Primer ecuación ordinaria

El eje transverso se corresponde con la variable que tiene coeficiente positivo

Horizontal con C = $(h;k)$

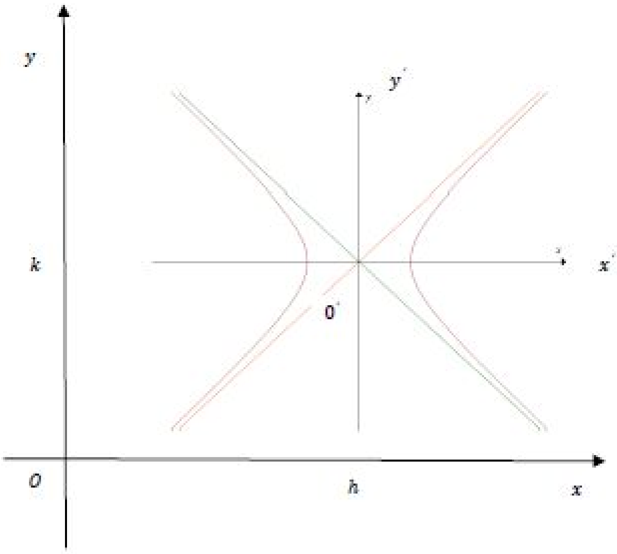
Centro (h; k) y eje paralelo al eje coordenado “x”

Término X^2 Positivo

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Eje trasverso // eje x

Ec. Ao: $y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$



$0' = C(h;k)$

Coordenadas:

$V'(h-a;k)$ y $V(h+a;k)$

$F'(h-c;k)$ y $F(h+c;k)$

$A'(h;k-b)$ y $A(h;k+b)$

Trasladamos los ejes coordenados “x” e “y” de modo que coincidan con el nuevo centro (h; k)

Entonces

$$x = x' + h \rightarrow x' = x - h$$
$$y = y' + k \rightarrow y' = y - k$$

Reemplazando en la Primer Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

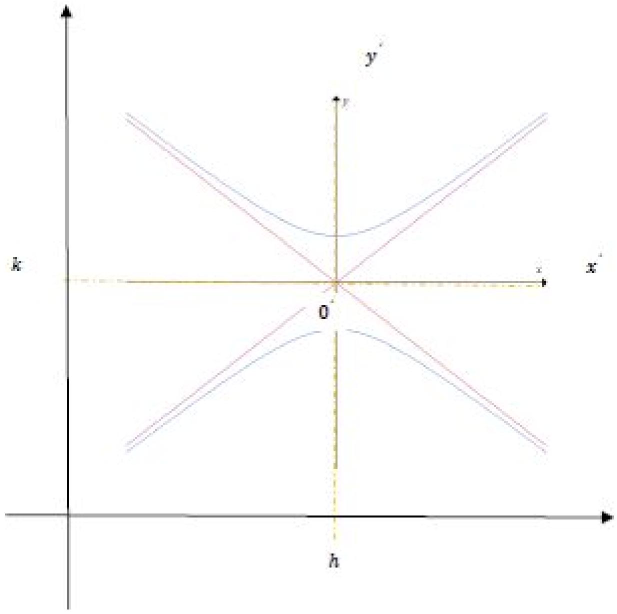
Reemplazando nuevamente

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Segunda Ecuación Ordinaria

Vertical con C = $(h;k)$

Centro (h; k) y eje paralelo al eje coordenado “y”



Término Y^2 Positivo

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Eje trasverso // eje y

Ec. Ao: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

Coordenadas:

$V'(h; k-a)$ y $V(h; k+a)$

$F'(h; k-c)$ y $F(h; k+c)$

$A'(h-b; k)$ y $A(h+b; k)$

La traslación se realiza de la misma forma
Y nos queda

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Segunda Ecuación Ordinaria

Forma ordinaria -> Forma general

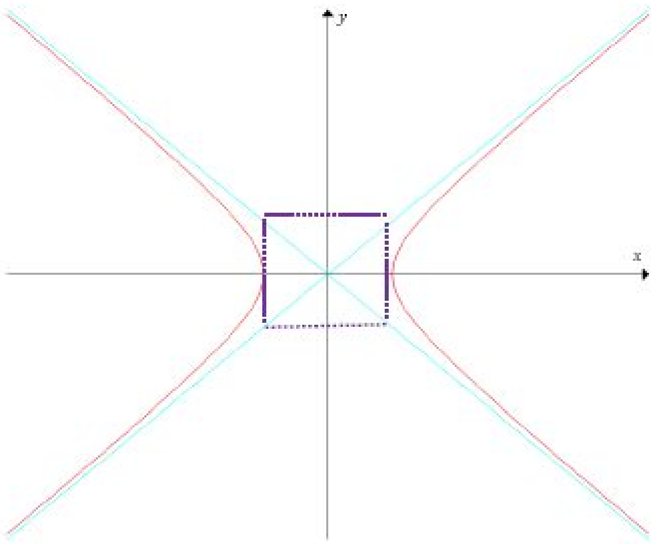
Partimos de	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Multiplicamos la ecuación por a^2b^2	$\frac{(x-h)^2 \; a^2b^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2 \; a^2b^2}{b^2} = a^2b^2$
Simplificando	$(x-h)^2 \; b^2 - (y-k)^2 \; a^2 = a^2b^2$
Desarrollando los cuadrados	$(x^2 - 2hx + h^2).b^2$ - $(y^2 - 2ky + k^2).a^2 = a^2b^2$
Distribuyendo e igualando a cero	$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2ky - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$
Reordenando la expresión según la ecuación general	$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$
Ecuación General de la Hipérbola A y C de distinto signo	$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Forma general -> Forma ordinaria

Partimos del caso	$-x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$
Agrupamos los términos según las variables e igualamos a 13	$3y^2 - 6y - x^2 + 4x = 13$
Sacamos factor común "-1" para la variable "x" y factor 3 para la variable "y"	$3.(y^2 - 2y) - (x^2 - 4x) = 13$
Determinamos los términos respectivos que van a formar los cuadrados perfectos	$Para\ x \rightarrow \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4 \qquad Para\ y \rightarrow \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$
Armamos teniendo en cuenta el factor que acompaña a cada uno de los términos.	$3.(y^2 - 2y + 1) - (x^2 - 4x + 4) += 13 - 4 + 3$
Formando los cuadrados de los binomios respectivos	$+3.(y-1)^2 - (x-2)^2 = 12$
Dividiendo por 12 la ecuación	$\frac{3.(y-1)^2}{12} - \frac{(x-2)^2}{12} = \frac{12}{12}$
Finalmente	$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$

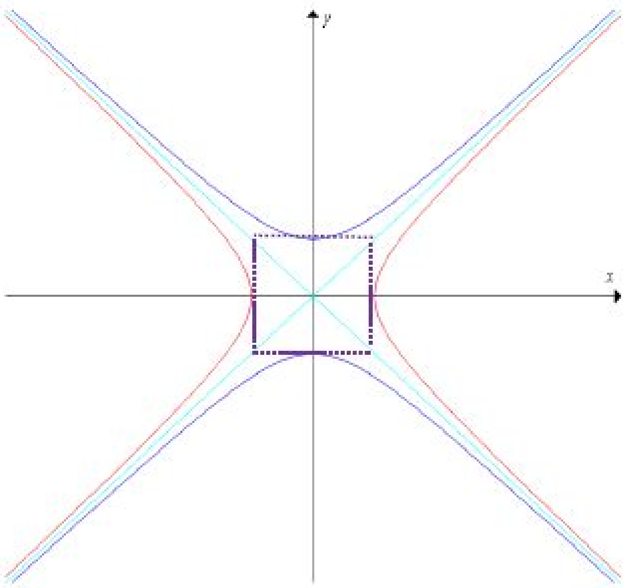
Casos Particulares

Hipérbola Equilátera o Rectangular



Las longitudes de los ejes transverso y conjugado son iguales.

Hipérbolas Conjugadas



Si la longitud del eje transverso de una hipérbola es igual a la longitud del eje conjugado de otra y viceversa.

ambas hipérbolas tienen el centro común, ambas asíntotas también son comunes y los focos equidistan del centro.

Parábola

Definición

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de manera que su distancia a una recta fija es siempre igual a su distancia a un punto fijo.
El punto fijo no pertenece a la recta.

Excentricidad: e = 1

p	Horizontal $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	Vertical $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
p>0	Término Y^2 Positivo ld // eje y eje parábola ⊥ eje y, *Se extiende hacia la derecha al ±∞*	Término X^2 Positivo ld // eje x eje parábola ⊥ eje x *Se extiende hacia arriba al ±∞*
p<0	Término Y^2 Positivo ld // eje y eje parábola ⊥ eje y, *Se extiende hacia la izquierda al ±∞*	Término X^2 Positivo ld // eje x eje parábola ⊥ eje x *Se extiende hacia abajo al ±∞*

l: Recta fija. Directriz

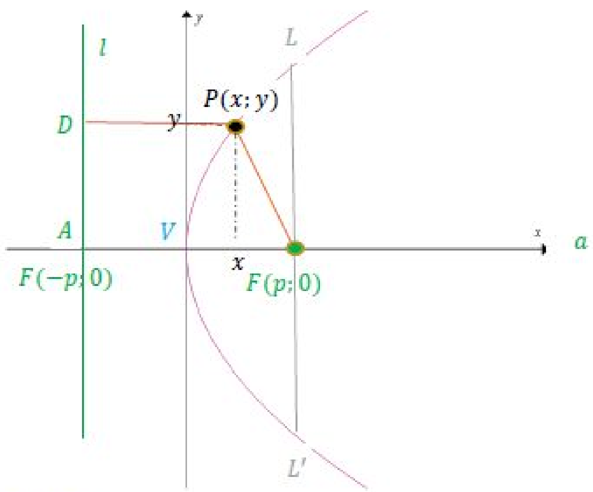
F: Punto fijo. Foco

a: Eje de parábola.
Perpendicular a l y pasa por F
A: Interseccion entre "l'

V : Vértice
Punto medio entre A

P(x; y): Punto genér

$\overline{LL'}$: Lado recto.
Perpendicular al eje "x" y pc

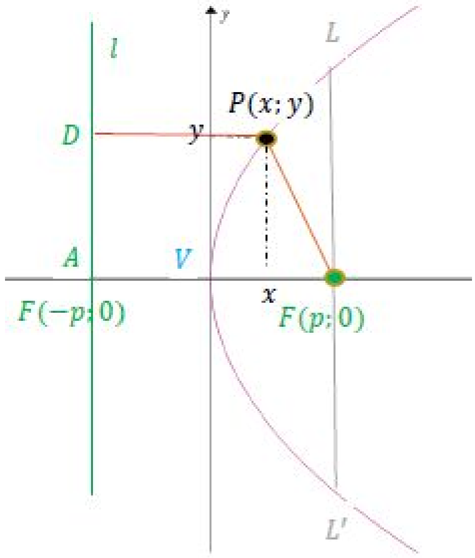


Foco en $p > 0$
Las ramas se abren hacia la derecha

Horizontal R+ con V = (0,0)

Con vértice en el origen de coordenadas y eje coincidente con el eje x

Término Y^2 Positivo
ld // eje y
eje parábola ⊥ eje y,
Se extiende hacia la derecha al $\pm\infty$

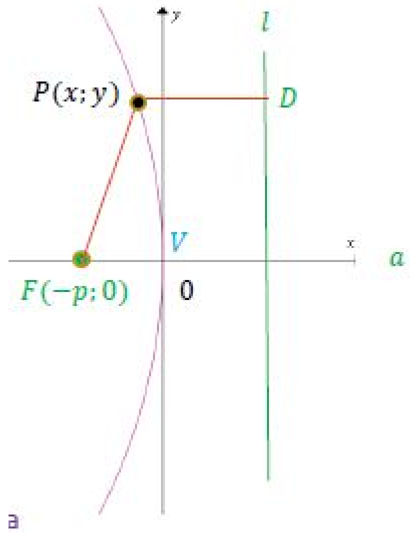


El punto $P(x;y)$ pertenece a la parábola, entonces, debe cumplir con la definición	$\overline{PF} = \overline{DP}$
Considerando el Teorema de Pitágoras para el cálculo de dichos segmentos, reemplazando nos queda	$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$
Elevando al cuadrado a ambos miembros	$\left(\sqrt{(p-x)^2 + y^2}\right)^2 = (x+p)^2$
Simplificando y desarrollando el cuadrado del binomio	$(p-x)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$
Desarrollando el cuadrado del binomio	$p^2 - 2px + x^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$
Cancelando	$-2px + y^2 = +2px$
Primer ecuación ordinaria Forma canónica	$y^2 = 4px$ o $y = \pm 2\sqrt{px}$

Primer ecuación ordinaria Forma canónica	$y^2 = 4px$ **o** $y = \pm 2\sqrt{px}$
Cuando $p > 0$ → está definida para valores de R^+ Cuando $p < 0$ → está definida para valores de R^-	*Se extiende hacia la derecha al* $\pm\infty$ *Se extiende hacia la izquierda al* $\pm\infty$
Simetría	La parábola es simétrica respecto al eje de la parábola. En este caso coincide con el eje x
Si despejamos y → $y = \pm 2\sqrt{px}$	Si despejamos x → $x = \pm 2\sqrt{py}$
Ordenada del foco $Si \quad x = p$	→ $y = 2p$
Longitud del lado recto	$\overline{LL'} = 4p$
Excentricidad:	La distancia a F y la distancia a A son iguales por lo que $e = 1$

Horizontal R- con V = (0,0)

Con vértice en el origen de coordenadas y eje coincidente con el eje x



Término Y^2 Positivo

ld // eje y

eje parábola ⊥ eje y,

Se extiende hacia la izquierda al ±∞

Los elementos son los mismos que en el caso anterior. Cambian sus coordenadas.

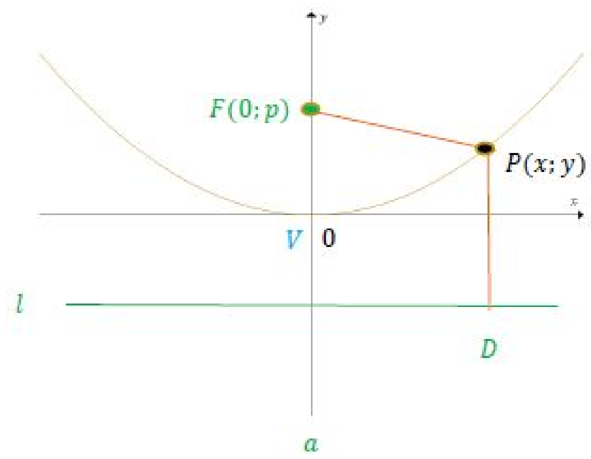
Se puede demostrar que la ecuación es

$$y^2 = 4px \quad o \quad y^2 = \pm 2\sqrt{px}$$

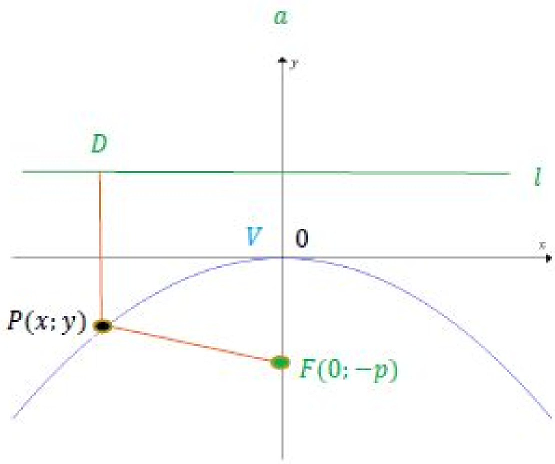
Primer ecuación ordinaria

Forma canónica

Vertical R± con V = (0,0)



Foco en $p > 0$
Las ramas se abren hacia arriba



Foco en $p < 0$
Las ramas se abren hacia abajo

Término X^2 Positivo
ld // eje x
eje parábola ⊥ eje x
Se extiende hacia arriba al ±∞

Término X^2 Positivo
ld // eje x
eje parábola ⊥ eje x
Se extiende hacia abajo al ±∞

Se puede demostrar que la ecuación es

$$x^2 = 4py \quad o \quad x^2 = \pm 2\sqrt{py}$$

Primer ecuación ordinaria
Forma canónica

Horizontal R± con V = $(h;k)$

- Término Y^2 Positivo
- ld // eje y
- eje parábola ⊥ eje y,

Coordenadas:

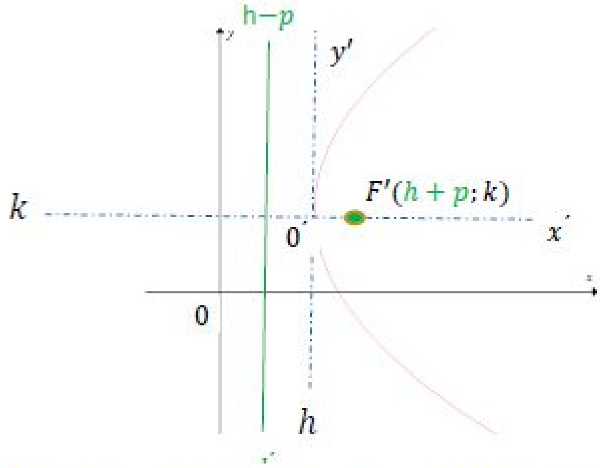
$V'(h;k) \quad F'(h+p;k)$

$l' \to \quad x = h - p$

Trasladamos los ejes coordenados “x” e “y” de modo que coincidan con el nuevo centro (h; k)

Entonces

$$x = x' + h \ \rightarrow \ x' = x - h$$
$$y = y' + k \ \rightarrow \ y' = y - k$$



Reemplazando en la Primer Ecuación Ordinaria

$y^2 = 4px$ por x' e y', tenemos

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Segunda Ecuación Ordinaria

Vertical R± con V = $(h;k)$

- Término X^2 Positivo
- ld // eje x
- eje parábola ⊥ eje x

Coordenadas:

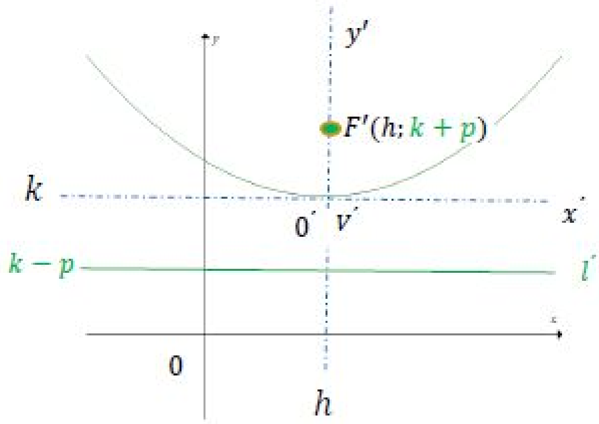
$V'(h;k) \quad F'(h;k+p)$

$l' \to \quad y = k - p$

Trasladamos los ejes coordenados “x” e “y” de modo que coincidan con el nuevo centro (h; k)

Entonces

$$x = x' + h \ \rightarrow \ x' = x - h$$
$$y = y' + k \ \rightarrow \ y' = y - k$$



Reemplazando en la Primer Ecuación Ordinaria

$x^2 = 4py$ por x' e y', tenemos

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Segunda Ecuación Ordinaria

Forma ordinaria -> Forma general

Partimos de

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$
$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$$

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A = 0$$

$En\ general, \quad A = 0, \quad C \neq 0; \quad D \neq 0$

Partimos de

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$x^2 - 2kx + h^2 = 4py - 4pk$$
$$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0$$

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$C = 0$$

$En\ general, \quad C = 0, \quad A \neq 0; \quad E \neq 0$

Forma general -> Forma ordinaria

Recuerda que lo que vamos a hacer es completar cuadrados y que tenemos que llevar la ecuación general a la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ *pues* $A = 0$

Partimos de	$4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$
Agrupamos los términos según las variables "y" en un miembro y el resto de los términos los pasamos al segundo miembro.	$4y^2 - 12y = -8x - 13$
Sacamos factor común 4 para la variable "y"	$4(y^2 - 3y) = -8x - 13$
Determinamos el término que va a formar el cuadrado perfecto	$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
Lo sumamos a ambos miembros	$4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -8x - 13 + 9$
Armamos del cuadrado del binomio.	$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4$
Sacamos factor común "-8"	$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8\left(x + \frac{1}{2}\right)$
Finalmente	$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Espacios Vectoriales

Definición

Un ESPACIO VECTORIAL (EV) es un conjunto no vacío V de **objetos (***Matrices, polinomios, funciones continuas, vectores, números (estructuras algebraicas))*, denominados vectores donde están definidas dos operaciones llamadas “suma” y “producto por escalar” que satisfacen los siguientes diez axiomas:

10 Axiomas:

SUMA	$Si\ “u”\ y\ “v”\ \in\ V\quad entonces\quad u+v\ está\ en\ V$ Ley de composición interna LCI Ley de cerradura para la suma vectoria
CONMUTATIVA	$Si\ “u”\ y\ “v”\ \in\ V\quad entonces\quad u+v=v+u$
ASOCIATIVA	$Si\ “u”\ ,\ “v”\ y\ "w"\ \in\ V\quad entonces\quad u+(v+w)=(u+v)+w$
ELEMENTO NEUTRO	$Si\quad “0”\in\ V\ entonces\quad \forall u\in\ V\quad se\ cumple\ que\quad 0+u=u+0=u$
ELEMENTO INVERSO	$para\ cada\quad “u”\in\ V\ \exists\ -u\in\ V\ :u+(-u)=(-u)+u=0$
PRODUCTO POR ESCALAR	$Si\quad “u”\in\ V\ \ y\ \ k\ \in un\ cuerpo\ K\ \ es\ un\ escalar\quad entonces\quad k.u\ \ está\ en\ V$ **Ley de composición externa LCE** **Ley de cerradura de la multiplicación por escalar**
ASOCIATIVA	$Si\ “u”\in\ V,\ \ "k"\ y\ "m"\quad escalares\ ,\ \ entonces\quad k.(m.u)=(k.m).u$
DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA DE VECTORES	$Si\ “u”\ y\ “v”\ \in\ V\quad y\quad k\ \ es\ un\ escalar\quad entonces\quad k(u+v)=ku+kv$
DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA DE ESCALARES	$Si\ “u”\quad \in\ \ V\quad y\quad k,m\ \ escalares\quad entonces\quad (k+m)u=ku+mu$
ELEMENTO NEUTRO	$\forall\quad “u”\in\ V\quad se\ cumple\quad 1.u=u$

Subespacio vectorial

W será un subespacio vectorial de V si cumple con los 10 axiomas.

Condiciones necesarias y suficientes:

1. El vector "0" de V está en W
2. Se cumple el 1er Axioma: "LCI → Suma"
3. Se cumple el 6to Axioma: "LCE → Prod. x. escalar"
4. Se cumple la ley del elemento inverso para la suma

Combinación Lineal

Se dice que un vector "w" es combinación (CL) de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ si se puede expresar como

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2, + \cdots + k_n v_n \quad \text{siendo los } k_i \text{ escalares}$$

Conjunto Generador

Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ pertenecientes al espacio vectorial V generan a V si todo otro vector de V se puede expresar como CL de ellos

Entonces $\forall$ $vector\ v \in V$, $\exists$ $escalares$ $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2, + \cdots + a_n v_n \quad \text{siendo los } a_i \text{ escalares}$$

$\forall v \in V, \exists a_1, a_2, \dots, a_n$ tal que
→ escalares.

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

siendo a_i escalares.

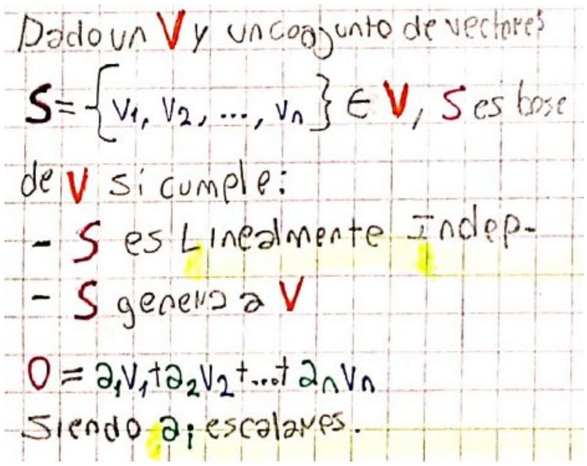
Base

Una Base de un Espacio Vectorial es: Un conjunto finito de vectores linealmente independientes, que generan al Espacio Vectorial al cual pertenecen.

Para verificar si los vectores del conjunto **S = {v1,v2,...,vn}**
son una base para el **E.V. V = R^n**. Hay que expresar el vector nulo como CL de estos.
Es decir: **0 = k1.v1 + k2.v2 + … + kn.vn**. Si organizamos esto de manera vertical como siempre, y sacamos su determinante, y este es **DIFERENTE DE 0**, esto quiere decir que son **Linealmente Independientes.** Por lo que **S** genera a **R^n**, y es **BASE** de **R^n**
Es decir: si **S** es **LI**, y **S** genera a **V, S** es base de **V = R^n**.

Dado un espacio vectorial V y un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de dicho espacio vectorial, diremos que S es base del espacio vectorial V si se cumple que

- S es Linealmente Independiente
- S genera a V


Dado un **V** y un conjunto de vectores
$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in V$, S es base
de **V** si cumple:
- S es Linealmente Indep.
- S genera a **V**

$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$
Siendo a_i escalares.

Recordemos que los vectores de la base S serán **linealmente independientes** si se pueden expresar como

$$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \quad \text{siendo los escalares } a_i = 0$$

En R^n se define un conjunto "S"

$S = \{e_1; e_2; e_3, \dots, e_n\}$ siendo:

$e_1 = (1,0,0,\dots,0)$ $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$

$e_n = (0,0,0,\dots,1)$

el vector "V" en R^n se puede expresar como

CL, o: $V = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n$ ∴

S genera a R^n y S es una base para R^n

|base canónica o estándar para R^n|

Dimensión

Cantidad de vectores en una base

▶ DIMENSIÓN: Cant. Vectores L.I. en una base.

$\mathbb{R}^2: S = \{e_1, e_2\}$ $\mathbb{R}^3: S\{e_1, e_2, e_3\}$

▶ Todo conjunto de n vectores Linealmente Indep. en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$

▶ Todo conjunto de n vectores Linealmente Indep. en $\mathbb{R}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$

Si $S = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es una base para V, todo conjunto con más de n vectores es LINEALMENTE DEPENDIENTE

Espacios renglones y columnas

Dado $A_{m \times n}$:

Espacios Renglones (filas)

$$\begin{matrix} r_1: (a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n}) \\ r_2: (a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n}) \\ r_3: (a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn}) \end{matrix}$$

"m" vectores fila, con "n" elementos

Subespacio $\mathbb{R}^n$ generado por "m" vectores Fila de A

Espacios columnas

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix} \quad C_2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{vmatrix} \quad C_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{vmatrix}$$

"n" vectores columna, con "m" elementos

Subespacio $\mathbb{R}^m$ generado por "n" vectores col. de A

▶ las op. elementales no alteran el espacio de renglones de una matriz. (sobre renglones/filas)

▶ Espacio de columnas de A := espacio de Filas de A^T

▶ el E. de renglones y columnas de A tienen la misma Dimensión que A

▶ Dimensión de A = Rango de A (# vectores de la base)

▶ $A_{n \times n}$ y tiene rango "n",

- └ A es invertible.
- └ $\det(A) \neq 0$
- └ vectores fila/columna de A son L.I.
- └ $A.x = 0$ y $A.X = b$ tienen solución.

Coordenadas

Generalizando

Si $S = \{\overline{v_1}; \overline{v_2}; \overline{v_3}; \ldots; \overline{v_n}\}$ es una base de un espacio vectorial "V",

Entonces, todo otro vector $\bar{u}$ de dicho espacio vectorial se puede expresar como

$$\bar{u} = c_1\,\overline{v_1} + c_2\,\overline{v_2} + c_3\,\overline{v_3} + \cdots + c_n\,\overline{v_n}$$

de manera única por ser LI los vectores de la base S

Es la expresión del vector $\bar{u}$ en función de la base "S"

A los escalares $c_1;\ c_2;\ c_3; \ldots; c_n$ se los denomina coordenadas del vector $\bar{u}$ relativas a la base "S"

Indicaremos

VECTOR de coordenadas de $\bar{u}$ relativas a la base "S"

$$(\bar{u})_S = (c_1;\ c_2;\ \ldots; c_n)$$

MATRIZ de coordenadas de $\bar{u}$ relativas a la base "S"

$$[\bar{u}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Cambio de base

Pasos para armar la matriz de cambio de base B -> B':

1. Expreso los vectores que componen a B como CL de los de B'
2. Escribo estos vectores, en las coordenadas de los vectores de B'.
   Osea, los escalares resueltos en el punto 1 organizados de manera vertical.
3. Armo la matriz.

Sean $B = \{\overline{u_1}; \overline{u_2}\} \rightarrow$ *Base Inicial* $\qquad B' = \{\overline{w_1}; \overline{w_2}\} \rightarrow$ *Nueva Base*

y $[\overline{u_1}]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\quad y \quad$ $[\overline{u_2}]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ⟶ Matrices de coordenadas de los vectores de la base inicial B en relación a la nueva base B'

Es decir $\quad \overline{u_1} = a\,\overline{w_1} + b\,\overline{w_2} \quad$ y $\quad \overline{u_2} = c\,\overline{w_1} + d\,\overline{w_2}$

→ expresamos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ como C.L. de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$; y tomamos nota de los escalares, que se denominan coordenadas, y se utiliza de la sig. manera:

→ expresamos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ como C.L. de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$; y tomamos nota de los escalares, que se denominan coordenadas, y se utiliza de la sig. manera:

$$\vec{v} = K_1(a w_1 + b\, w_2) + K_2(c w_1 + d\, w_2) = (K_1 a + K_2 c)\vec{w}_1 + (K_1 b + K_2 d)\vec{w}_2$$

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} K_1 a + K_2 c \\ K_1 b + K_2 d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{[\vec{v}]_B} \quad \therefore A.$$

MATRIZ DE TRANSICIÓN de la base B a la base B' → P

→ Si ya tenemos la matriz P, podemos hacer el sentido inverso:

$$[\vec{v}]_B = \underbrace{P^{-1}}_{\text{se llama matriz "Q"}} \cdot [\vec{v}]_{B'}$$

P es la matriz de transición de la base B a la base B'

$\Longrightarrow \quad \forall\, \bar{v}$ se tiene $[\bar{v}]_{B'} = P[\bar{v}]_B \quad y \quad [\bar{v}]_B = P^{-1}[\bar{v}]_{B'}$

Observaciones

P es invertible

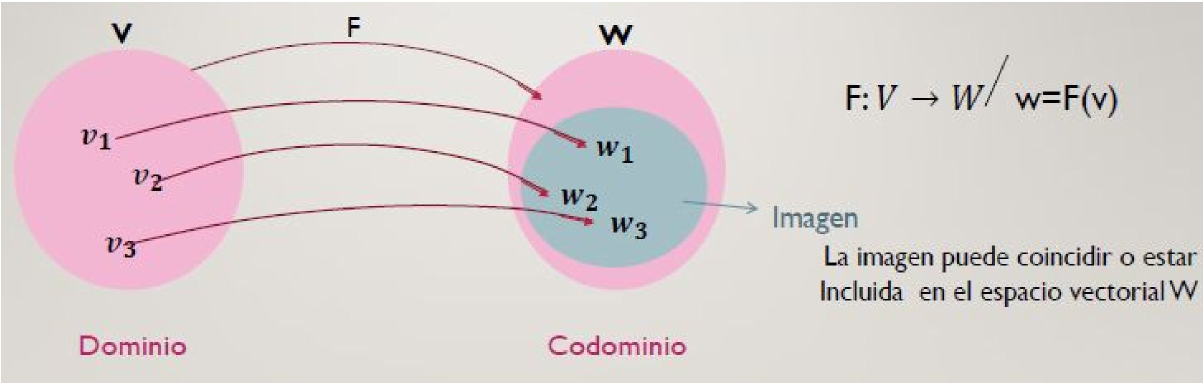
P es la matriz de transición de B a B'

P^{-1} es la matriz de transición de B' a B

Transformaciones Lineales

Función Vectorial F: V → W

Una función vectorial relaciona cada vector de un espacio vectorial con un único vector de otro espacio vectorial



Definición

Si **V** y **W** son espacios vectoriales (**EV**) y **F** o **T** es una función que asocia cada vector de **V** con un único vector de **W** siendo **F:** $\boldsymbol{V \to W}$ **w = F(v)** y además **F:** $\boldsymbol{V \to W}$ cumple:

1. $F(u+v) = F(u) + F(v)\ ,\ \ u\ y\ v\ \in V$
2. $F(\lambda \mathbf{u}) = \lambda\, F(u)\ ,\quad \forall u\ \in V\ siendo\ \lambda\ escalar$

Entonces **F** o **T** es transformación lineal (**TL**).

Consideraciones:

- No toda función vectorial será transformación lineal
- Trabajamos sobre espacios vectoriales donde existen dos operaciones, suma y multiplicación por escalar la idea es que estas operaciones se preservan a través de la TL

Si en vez de dos vectores tenemos “n” vectores y “n” escalares, combinando los puntos 1) y 2), entonces:

Sean $\boldsymbol{v_1}; \boldsymbol{v_2}; \ldots; \boldsymbol{v_n}$ vectores de V y $\boldsymbol{k_1}; \boldsymbol{k_2}; \ldots; \boldsymbol{k_n}$ son escalares, entonces,

$$F(\boldsymbol{k_1 v_1} + \boldsymbol{k_2 v_2} + \ldots + \boldsymbol{k_n v_n}) = F(k_1 v_1) + F(k_2 v_2) + \ldots + F(\boldsymbol{k_n v_n}) \text{ por condición } 1)$$
$$F(\boldsymbol{k_1 v_1} + \boldsymbol{k_2 v_2} + \ldots + \boldsymbol{k_n v_n}) = k_1 F(v_1) + k_2 F(v_2) + \ldots + \boldsymbol{k_n} F(\boldsymbol{v_n}) \text{ por condición } 2)$$

Ejemplos:

- $T: R^2 \to R^3 \ / \ T(x;y) = (x;\ x+y;\ x-y)$
- $T: R^n \to R^m \ / \ T(\bar{x}) = A.\bar{x}$
- $T: V \to W \ / \ T(v) = 0 \quad , \quad \forall\, v \in V$

  A todos los elementos del EV. **V**, la **TL** le hace corresponder el elemento cero.
- $T: V \to V \ / \ T(v) = v$

Ademas, k es un escalar , entonces

$$\boldsymbol{T(v) = kv}$$

- $Si \ \ k > 1 \Rightarrow T\ es\ una\ dilatación$ (estira)
- $Si \ \ 0 < k < 1 \Rightarrow T\ es\ una\ contracción$ (comprime)

Propiedades

$T: V \to W$ es transformación lineal

1. $\boldsymbol{T(0) = 0} \quad como \quad 0.v = 0 \quad \Rightarrow T(0) = T(0.v) = 0.T(v) = 0 \quad para\ v \in V$

2. $\boldsymbol{T(-v) = -T(v)},\ \forall\, v \in V \quad pues \quad T(-v) = T(-1.v) = -1.T(v) = -T(v)$

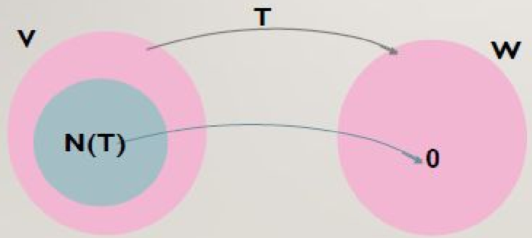
3. $\boldsymbol{T(v-w) = T(v) - T(v)},\ \forall\, v\, y\, w \in V$

   $pues \quad T(v-w) = T(v+(-1).w) = T(v) + (-1)T(w) = T(v) - T(w)$

Núcleo, kernel o espacio nulo

Es el subconjunto de los vectores del **EV V** que tiene como imagen el vector nulo de **W**

Se indica **N(T)** o **ker(T)**
Es un **subespacio** de **V**
Su **dimensión** se denomina **Nulidad de T**



Ejemplo

$$T:\ R^n \rightarrow R^m \ /\ \ A.\bar{x} = 0$$

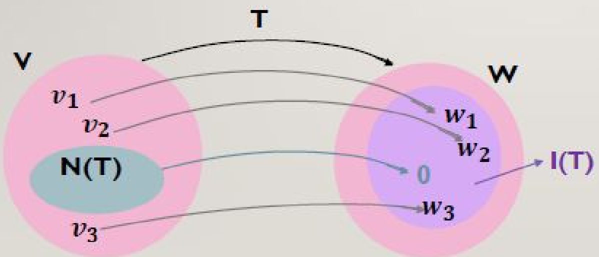
Es el núcleo
La solución del sistema homogéneo
Siempre compatible

El núcleo es el espacio de soluciones

Imagen o recorrido

Es el subconjunto de los vectores del **EV W** donde todos los vectores son imagen de algún vector del **EV V**. Son los valores de la función cuando **"v"** varía en **V**

Se indica **I(T)** o **R(T)**
Es un **subespacio** de **W**
Su **dimensión** se denomina **Rango de T**



Ejemplo

$$T:\ R^n \rightarrow R^m \ /\ \ A.\bar{x} = \boldsymbol{b} \quad o\ T(x) = b$$

Imagen
Sistema no homogéneo
Será compatible si "b" está en el espacio de columnas de la matriz A

Teorema de la dimensión

La suma de la Nulidad de la transformación con el Rango de la transformación es igual a la dimensión del espacio vectorial de partida o dominio

$T: V \rightarrow W$ es TL y V es de dimensión "n", entonces

Rango T + Nulidad de T = n

Ejemplo

$$Para \qquad T:\ R^n \rightarrow R^m \ /\ \ T(x) = A.\bar{x}$$

$$"n"\ \ corresponde\ a\ la\ dimensión\ del\ espacio\ vectorial\ de\ partida$$

Determinación por valores de una base

Una TL está completamente determinada por los valores de una base.

Si tenemos una base $S = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ de V y $T: V \to W$ $es\ TL$

y conocemos las imágenes $\mathrm{T}(\boldsymbol{v_1})$; $\mathrm{T}(\boldsymbol{v_2})$; … ; $\mathrm{T}(\boldsymbol{v_n})$

Podemos obtener la imagen de T(v) de cualquier vector “v”

1. *Expresar el vector "v" en términos de la base*

$$v = k_1v_1 + k_2v_2, + \cdots + k_nv_n$$

2. *Determinar* $T(v) = \boldsymbol{k_1}T(\boldsymbol{v_1}) + \boldsymbol{k_2}T(\boldsymbol{v_2}) + \ \ldots + \boldsymbol{k_n}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v_n})$

Ejemplo

$S = \{\overline{v_1};\ \overline{v_2};\ \overline{v_2}\}$ donde $\overline{v_1} = (1;1;1)$; $\overline{v_2} = (1;1;0)$; $\overline{v_3} = (1;0;0)$

$T: R^3 \to R^2$ $es\ TL$ y $\mathrm{T}(\overline{v_1}) = (\mathbf{1};\mathbf{0})$; $\mathrm{T}(\overline{v_2}) = (\mathbf{2};-\mathbf{1})$; $\mathrm{T}(\overline{v_3}) = (\mathbf{4};\mathbf{3})$

Determinar $\mathrm{T}(v)$; ? *siendo* $\bar{v} = (\mathbf{2};-\mathbf{3};\mathbf{5})$

1. $(\mathbf{2};-\mathbf{3};\mathbf{5}) = k_1(1;1;1) + k_2(1;1;0) + \cdots + k_n(1;0;0)$

Siendo $k_1 = 5$
$k_2 = -8$
$k_3 = 5$

2. $T(\mathbf{2};-\mathbf{3};\mathbf{5}) = 5T(v_1) - 8T(v_2) + \ 5\boldsymbol{T}(v_3)$

$T(\mathbf{2};-\mathbf{3};\mathbf{5}) = \mathbf{5}(\mathbf{1};\mathbf{0}) - 8(\mathbf{2};-\mathbf{1}) + \ \mathbf{5}(4;3)$

$T(\mathbf{2};-\mathbf{3};\mathbf{5}) = \mathbf{5}(\mathbf{1};\mathbf{0}) - 8(\mathbf{2};-\mathbf{1}) + \ \mathbf{5}(4;3)$

$T(\mathbf{2};-\mathbf{3};\mathbf{5}) = (\mathbf{9};\mathbf{23})$

Matriz Estándar

Si T: $R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal,
entonces es posible encontrar una matriz A_{mxn} tal que la transformación "T" es la multiplicación por la matriz A

$$T(\bar{x}) = A\,\bar{x}$$

En general, si $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ \dots\ , \ \bar{e}_n\}$ es la base canónica o estándar para R^n y A es una matriz de orden mxn (A_{mxn})

que tiene como imágenes de los vectores de la base,

a los vectores columna de la matriz A

$$A = \begin{array}{cccc} \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{matrix} \end{array} \quad \bigstar$$

Demostración: T: $R^n \rightarrow R^m$ **es la multiplicación por la matriz A**

Siendo $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1.\bar{e}_1 + x_2.\bar{e}_2 + \dots + x_n.\bar{e}_n$

Por linealidad $T(\bar{x}) = x_1.T(\bar{e}_1) + x_2.T(\bar{e}_2) + \dots + x_n.T(\bar{e}_n)$ (I)

Además,

$$A.\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & a_{m3}\,x_3 & + & \dots & + & a_{mn}\,x_n \end{matrix}$$

Reexpresando

$$A.\bar{x} = x_1.\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2.\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n.\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Según $\bigstar$ $A.\bar{x} = x_1.T(\bar{e}_1) + x_2.T(\bar{e}_2) + \dots + x_n.T(\bar{e}_n)$ (2)

Luego como los segundos miembros de (I) y de (2) son iguales, entonces $T(\bar{x}) = A.\bar{x}$

Para $T(\bar{x}) = A.\bar{x}$ A es la matriz estándar para la transformación T
Y tiene como vectores columna a las imágenes de los vectores de la base estándar

$$A = [\,T(\bar{e}_1) \mid T(\bar{e}_2) \mid \ \dots \ \mid T(\bar{e}_n)]$$

Ejemplo:

$$T: R^2 \to R^2 \,/\, T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2.0 \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2.1 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego $T: R^2 \to R^2 \,/\, T(\overline{x}) = A.\overline{x}$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$