Resumen FÍSICA 1 Teórico

Cátedra: Física 1

Año: 2020

Curso: 1R3

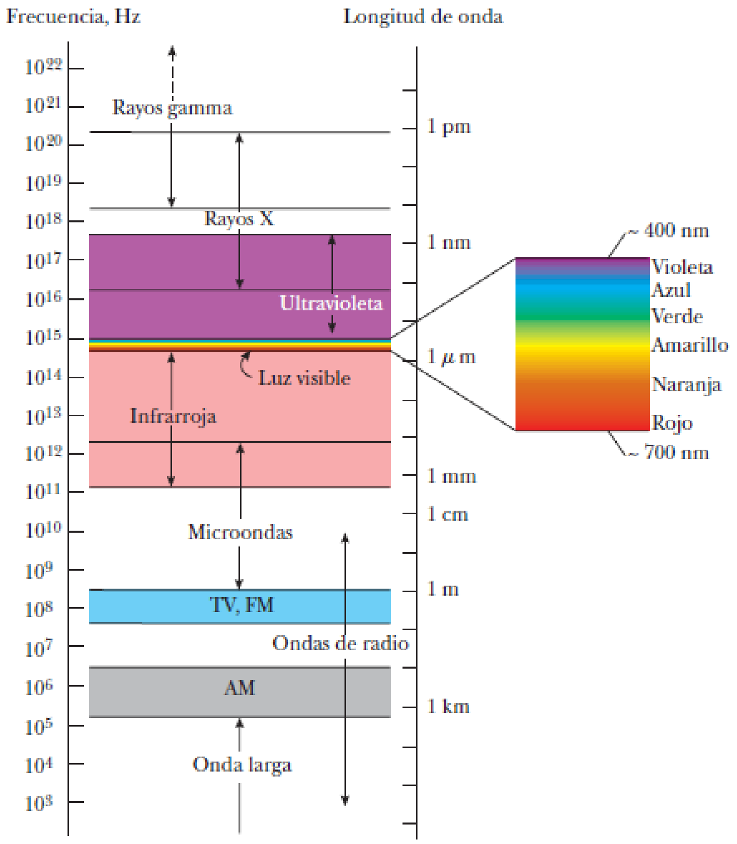
Por: Enrique Walter Philippeaux

Hecho con material del resumen de: Leandro Armatti
y del resumen de: Federico Cañete,
de clases virtuales del profesor: Julio César Catán
y con partes del apunte Física I - GTP de la UTN FRC

Índice

Óptica Geométrica

Espectro electromagnético



Intervalo de longitud (nm)	Descripción de color
400–430	Violeta
430–485	Azul
485–560	Verde
560–590	Amarillo
590–625	Naranja
625–700	Rojo

Nota: Aquí los intervalos de longitud de onda son aproximados. Distintas personas describirán los colores de manera diferente.

Luz

La luz es una forma de energía y como tal, debería medirse en Joules (J) en el Sistema Internacional de medidas, no obstante dado que no toda la luz emitida por una fuente produce sensación luminosa ni toda la energía que consume se convierte en luz, para cuantificar la radiación a la que es sensible el ojo humano se definieron nuevas magnitudes y unidades de medida, algunas de estas son:

- **Flujo luminoso** (**φ**), unidad de medida lumen (**lm**).
  Básicamente, podemos definir el flujo luminoso φ, como la potencia emitida en forma de radiación luminosa a la que el ojo humano es sensible.
- **Intensidad Luminosa** (**I**), unidad de medida candela (**cd**).
  Cantidad de flujo luminoso emitido por una fuente en una dirección determinada por unidad de ángulo sólido. Magnitud que expresa la distribución del flujo luminoso en el espacio. Un ángulo sólido o estéreo que se mide en estereorradianes

$$I = \frac{\varphi}{\omega}$$

- **Iluminancia** (**E**), unidad de medida lux (**lx**).
  Cantidad de flujo luminoso recibido por una superficie. Unidad de mediad Lux = lm / m2

$$E = \frac{\varphi}{S}$$

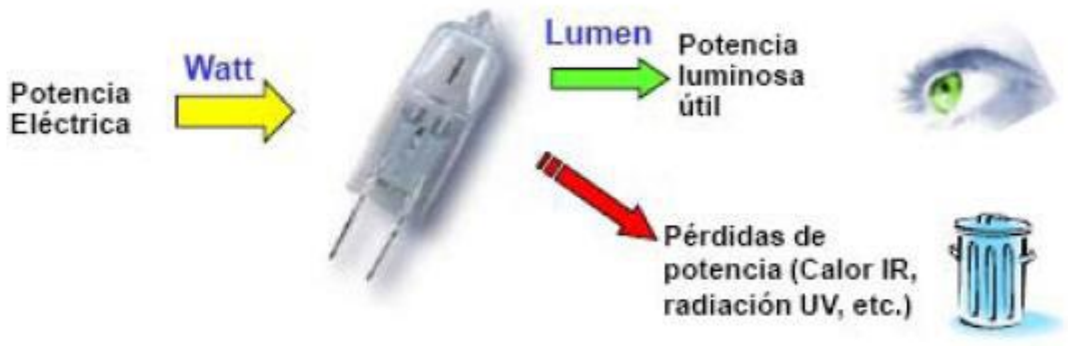
- **Luminancia** (**L**), unidad de medida candela/m² **(cd/m²)**.
  Efecto de luminosidad que produce una superficie en la retina del ojo, tanto si procede de una fuente primaria que produce luz, como si procede de una fuente secundaria o superficie que refleja luz.
  Es la relación entre la intensidad luminosa y la superficie aparente vista por el ojo en una dirección determinada. Unidad de medida cd/m2

$$L = \frac{I}{S_{aparente}}$$

  La percepción de la luz es realmente la percepción de diferencias de luminancias.
  El área proyectada es la vista por el observador en la dirección de la observación. Se calcula multiplicando la superficie real iluminada por el coseno del ángulo que forma su normal (perpendicular) con la dirección de la intensidad luminosa.

- **Rendimiento o eficiencia luminosa** (**η**), unidad de medida lumen/Watt (**lm/watt**).
  Es el cociente entre el flujo luminoso producido por la fuente y la potencia consumida. Unidad de medida lm/Watt.

$$\eta = \frac{\varphi}{P_{entrada}}$$

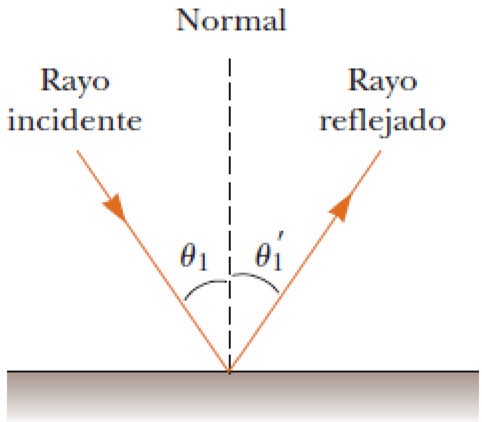


Reflexión

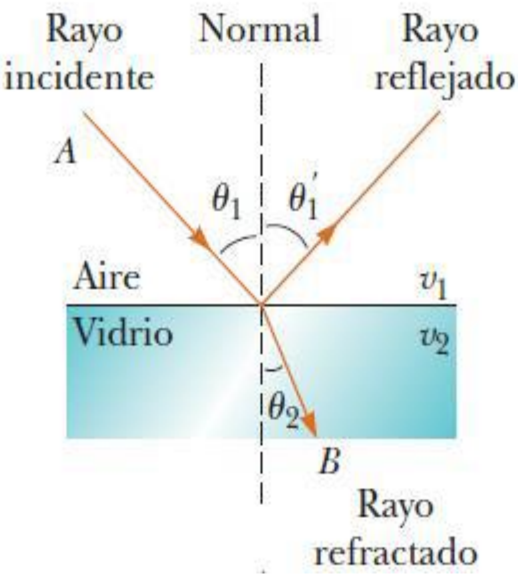
Leyes

1. El rayo reflejado, el rayo incidente y la normal están en un mismo plano.
2. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

$$\theta_1 = \theta'_1$$



Refracción



$$n_2 > n_1 \Leftrightarrow v_2 < v_1 \Leftrightarrow \theta_1 > \theta_2$$
$$n_2 < n_1 \Leftrightarrow v_2 > v_1 \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2$$

Leyes

1. El rayo incidente, la normal y el rayo refractado se encuentran en un mismo plano.
2. **Ley de Snell:**

$$n_1 sen\, \theta_1 = n_2 sen\, \theta_2$$

Siendo:
n_1: índice de refracción del primer medio
n_2: índice de refracción del segundo medio
θ_1: Ángulo de incidencia
θ_2: Ángulo de refracción

n_1y n_2: Índice de refracción

El índice de refracción **n** de una sustancia transparente es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en esa sustancia:

$$\boxed{\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{v}}}$$

- La velocidad de la luz en el vacío (c) es igual a 3x10^8 m/s; y es la velocidad máxima que existe.
- Un índice de refracción pequeño indica una velocidad grande en el medio.
- El índice de refracción del aire se puede tomar como 1 ya que la velocidad de la luz en el aire es aproximadamente igual que en el vacío.
- **Medios Isótropos:** tienen igual índice de refracción en todas las direcciones.
- **Medios Anisótropos:** tienen diferente índice de refracción según la dirección que se tome.

Refracción Total

Un rayo de luz se acerca a la normal cuando pasa de un medio de menor índice de refracción a otro de mayor, y se aleja de ella en caso contrario.
Si los rayos de luz pasan de un medio a otro medio con índice de refracción menor:

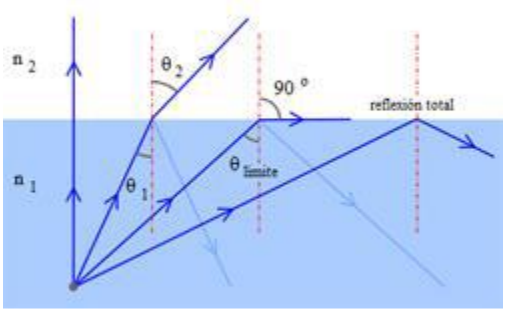
- Los rayos incidentes forman con la normal, ángulos cada vez mayores.
- Los rayos refractados se alejan de la normal hasta formar con ella un ángulo de 90º (ángulo límite θL).
- El rayo incidente deja de pasar al siguiente medio:

$$n_1 sen\ \theta_1 \ = n_2 sen\ \theta_2$$

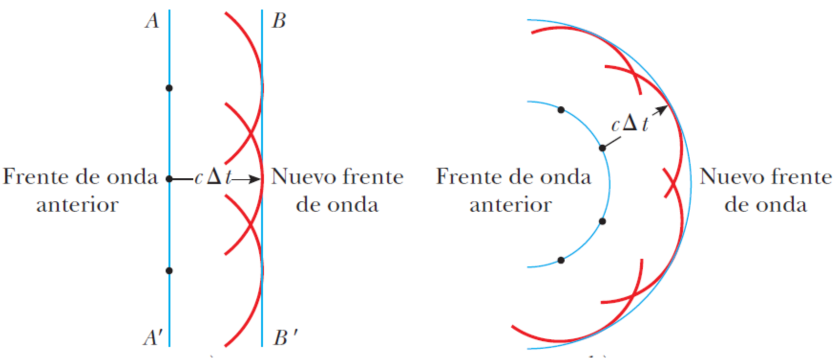
Si $\theta_2 = 90º \Rightarrow sen\ \theta_2 = sen\ 90º \ = \ 1$

Entonces: $n_1 sen\ \theta_L = n_2$

Nos queda: $sen\ \theta_L = \frac{n_2}{n_1}$



Principio de Huygens

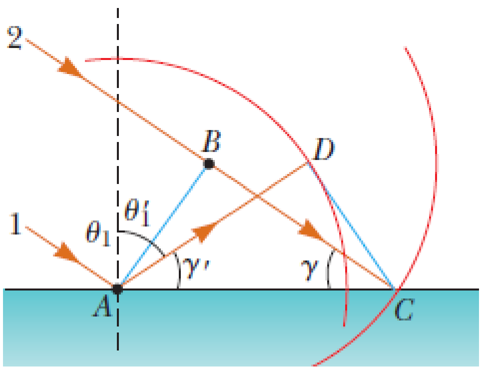


Es una construcción para usar el conocimiento de un frente de onda anterior con el fin de determinar la posición de un nuevo frente de onda, en un instante.
En la construcción de Huygens todos los puntos de un frente de onda determinado se toman como fuentes puntuales de la producción de ondas esféricas, las cuales se propagan hacia afuera según la velocidad en ese medio. En un cierto tiempo, la nueva posición del frente de onda es la superficie tangente a las ondas secundarias, el radio de las ondas esféricas al cabo de un cierto tiempo es igual a $c \times \Delta t$

Aplicado a la reflexión

La recta AB representa un frente de onda plana de la luz incidente precisamente cuando el rayo 1 incide en la superficie. En este instante, la onda en A envía un tren de ondas de Huygens (el arco circular en rojo con centro en A). La luz reflejada se propaga hacia D. Al mismo tiempo, la onda en B emite un tren de ondas de Huygens (el arco circular en rojo con centro en B) con la propagación de luz hacia C. Estos trenes de ondas después de un intervalo t, después del cual el rayo 2 incide en la superficie. Como los rayos 1 y 2 se mueven a la misma rapidez, debe obtener

$AD = BC = c\Delta t$



$$\cos\gamma = \frac{BC}{AC} \quad \text{y} \quad \cos\gamma' = \frac{AD}{AC}$$

donde $\gamma = 90° - \theta_1$ y $\gamma' = 90° - \theta_1'$. Como $AD = BC$, tenemos

$$\cos\gamma = \cos\gamma'$$

Por lo tanto:

$$\gamma = \gamma'$$

$$90° - \theta_1 = 90° - \theta_1'$$

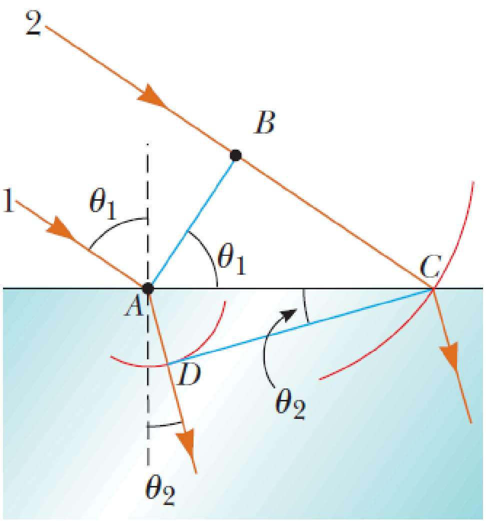
Entonces...

$$\theta_1 = \theta_1'$$

Que es la ley de la reflexión.

Aplicado a la refracción

En el instante en que el rayo 1 incide sobre la superficie y el intervalo de tiempo consecutivo hasta que el rayo 2 hace lo mismo. Durante este intervalo de tiempo, la onda en A envía un tren de ondas de Huygens (el arco en rojo con centro en A) y la luz refracta hacia D. En el mismo intervalo de tiempo, la onda en B envía un tren de ondas de Huygens (el arco rojo con centro en B) y la luz continúa su propagación hacia C. Ya que estos dos trenes de onda se desplazan en medios diferentes, los radios de los trenes de ondas son diferentes. El radio del tren de ondas desde A es $AD = v_2 \Delta t$ donde v_2 es la rapidez de la onda en el segundo medio. El radio del tren de ondas desde B es $BC = v_1 \Delta t$ donde v_1 es la rapidez de la onda en el medio original.



A partir de los triángulos ABC y ADC

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1\,\Delta t}{AC} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2\,\Delta t}{AC}$$

Dividimos la primera ecuación entre la segunda, sabiendo que: $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$.

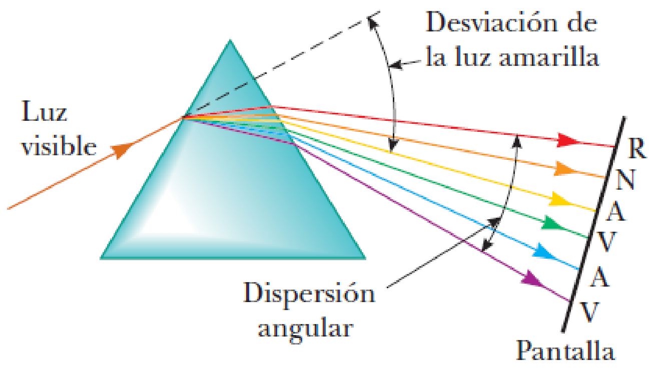
$$\frac{\text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

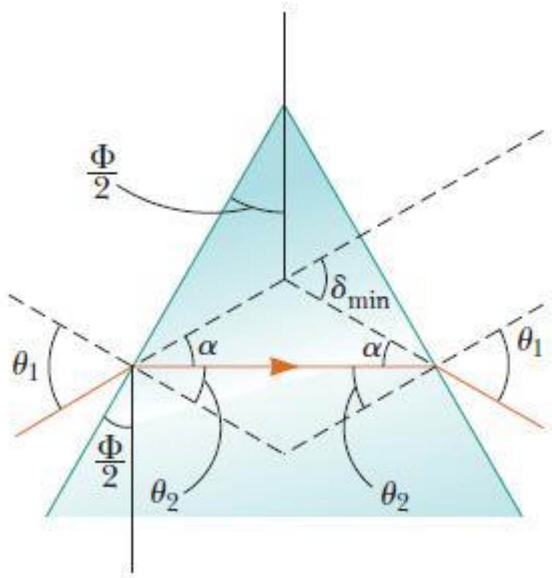
Entonces...

$$n_1\,\text{sen}\,\theta_1 = n_2\,\text{sen}\,\theta_2$$

Que es la ley de la refracción de Snell.

Caso del prisma





δ ángulo de desviación.

Φ ángulo de punta

$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha = \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta_{\text{mín}}}{2} = \frac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}$$

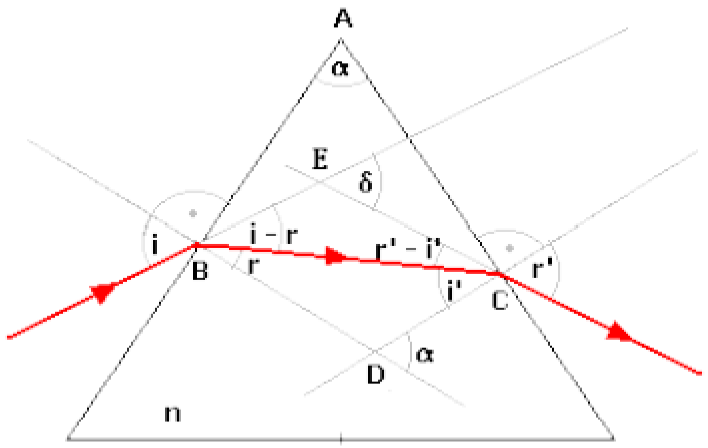
$$\theta_2 = \Phi/2$$

$$\delta_{\min} = 2\alpha.$$

$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha.$$

$$(1.00)\ \text{sen}\ \theta_1 = n\ \text{sen}\ \theta_2 \quad \rightarrow \quad n = \frac{\text{sen}\ \theta_1}{\text{sen}\ \theta_2}$$

$$n = \boxed{\frac{\text{sen}\left(\dfrac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}\right)}{\text{sen}\,(\Phi/2)}}$$



$$\frac{sen\ i}{sen\ r} = \frac{n2}{n1}$$

$$\frac{sen\ i'}{sen\ r'} = \frac{n1}{n2}$$

Espejos

Un espejo es toda superficie finamente pulida reflectante. Hay espejos curvos y planos.

Definiciones

- **Cuerpo:** Es aquel cuerpo, desde donde parten los rayos luminosos que inciden en el espejo.
- **Imagen:**
  - **Imagen Real:** Es la figura geométrica obtenida mediante la intersección de los rayos reflejados.
  - **Imagen Virtual:** Es la intersección de la prolongación de los rayos reflejados.

Ecuaciones de los espejos

El objeto está a una distancia p de un espejo de distancia focal f, y la imagen está a una distancia q, la ecuación es:
El foco está a la mitad de distancia entre el polo del espejo y el centro de curvatura. **f = R / 2**

$$\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}}$$

Siendo:

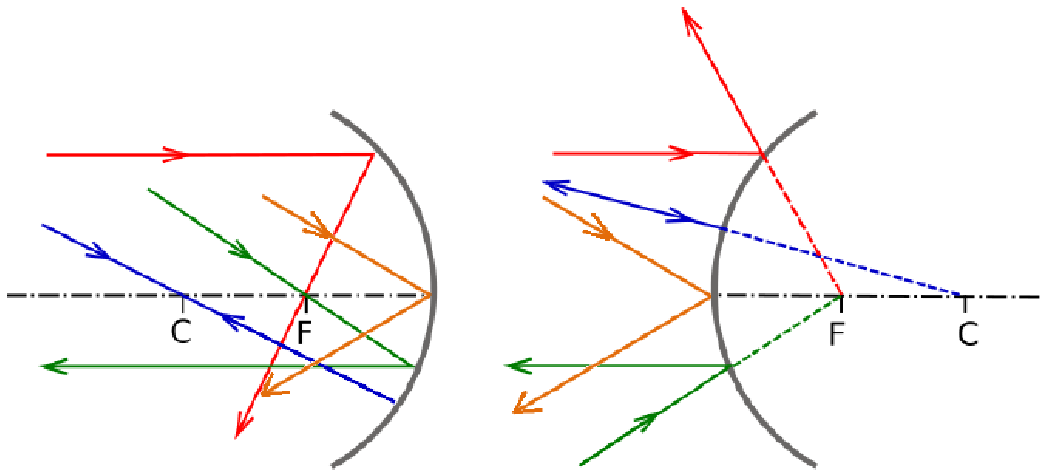
- **p** = distancia del **objeto** al vértice del espejo.
- **q** = distancia de la **imagen** al vértice del espejo
- **f** = distancia **focal**. (+) en espejos cóncavos y (-) en los convexos.

El aumento lateral M de un sistema óptico es la razón entre el tamaño (altura, ancho o alguna otra dimensión lineal transversal) de la imagen y el tamaño del objeto. En el caso del objeto:
Aumento Lateral = tamaño imagen / tamaño objeto = - distancia imagen / distancia objeto

$$\boxed{M=\frac{h'}{h}=-\frac{q}{p}}$$

Un aumento positivo indica una imagen derecha; uno negativo indica una imagen invertida.

- **Si M > 1: Imagen MAYOR y DERECHA**
- **Si 1 > M > 0: Imagen MENOR y DERECHA**
- **Si 0 > M > -1: Imagen MENOR e INVERSA**
- **Si -1 > M: Imagen MAYOR e INVERSA**



Espejo cóncavo Espejo convexo

1. (rojo) Todo rayo que incide paralelo al eje principal se refleja pasando por el foco
2. (verde) Por reversibilidad de los caminos ópticos, todo rayo que pase por el foco se refleja paralelo al eje principal
3. (azul) Todo rayo que pase por el centro de curvatura se refleja sobre sí mismo
4. (naranja) Todo rayo incidente al polo se refleja formando el mismo ángulo que el incidente con el eje principal (Ley de Reflexión)

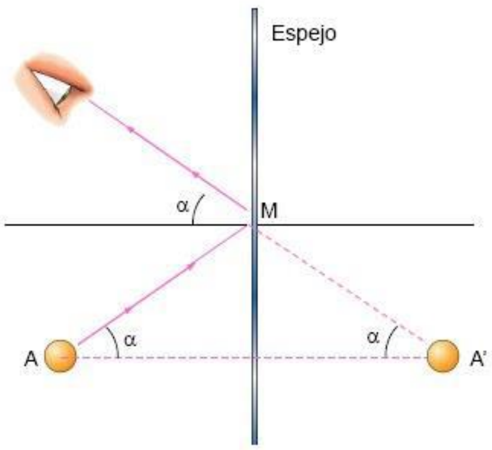
Espejos Planos

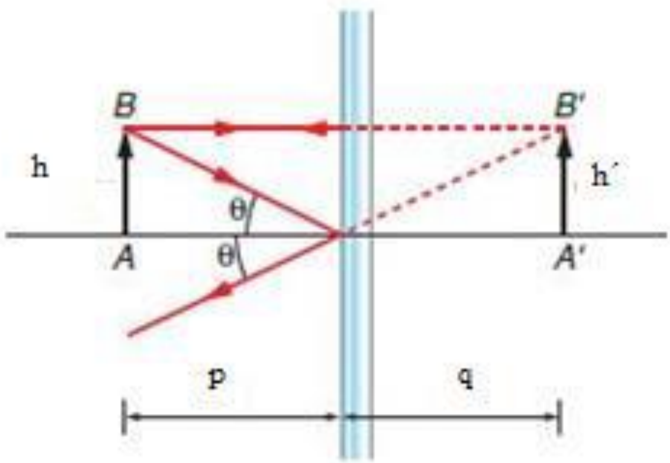
Formación de imágenes

- **Imagen real,** es cuando está formada sobre los propios rayos. Estas imágenes se pueden recoger sobre una pantalla.
- **Imagen virtual,** es cuando está formada por la prolongación de los rayos, y no se puede recoger sobre una pantalla.

Imágenes en los espejos planos.

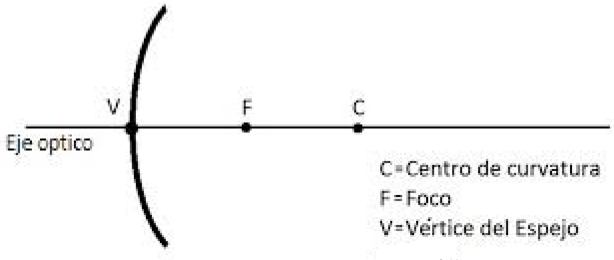
1. La **imagen** obtenida es **virtual**.
2. Es **simétrica** del objeto con respecto al espejo.
3. Es **derecha**.
4. El **tamaño** del objeto y su imagen son **iguales**.





Espejos Esféricos

- **CÓNCAVOS**. La superficie reflectante es la cara interna.
- **CONVEXOS**. La superficie reflectante es la cara externa.



Sus elementos:

- **Centro de curvatura,** es el centro de la esfera teórica a la que pertenece el casquete esférico.
- **Radio de curvatura**, es el radio de la esfera teórica a la que pertenece el casquete dónde está realizado el espejo.
  - **Espejo cóncavo**: R < 0
  - **Espejo convexo**: R > 0
- **Vértice**, es el centro del casquete esférico.
- **Eje principal**, es la línea imaginaria que pasa por el centro de curvatura y el vértice.
- **Foco**, Es el punto situado sobre el eje principal, por donde pasan todos los rayos reflejados procedentes de los rayos paralelos que llegan al espejo.
- **Distancia focal**, es la distancia entre el foco y el vértice del espejo

$$distacia\ focal\ (f) = \frac{radio\ de\ curvatura(R)}{2}$$

Formación de imágenes

La construcción de imágenes en los espejos esféricos, se realizan aplicando las dos propiedades siguientes:

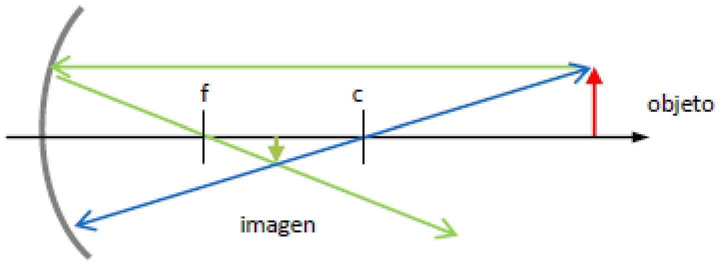
1. **Todo rayo paralelo al eje principal, se refleja pasando por el foco (y viceversa).**
2. **Todo rayo que pasa por el centro de curvatura, se refleja sobre sí mismo.**

Siendo:

- **p** = distancia del **objeto** al vértice del espejo.
- **q** = distancia de la **imagen** al vértice del espejo
- **f** = distancia **focal**. (+) en espejos cóncavos y (-) en los convexos.

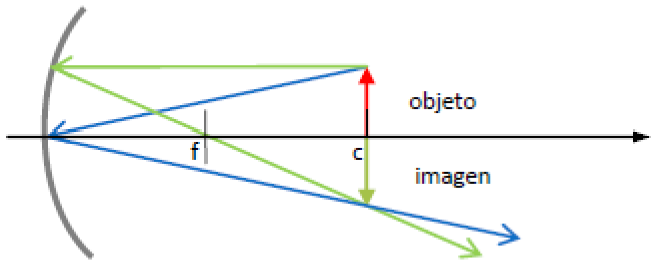
Clase de espejo	Situación del objeto	Características de la imagen
Cóncavo	p > 2f	Real, menor e invertida
Cóncavo	p = 2f	Real, igual e invertida
Cóncavo	f < p < 2f	Real, mayor e invertida
Cóncavo	p = f	No se forma imagen
Cóncavo	p < f	Virtual, mayor y derecha
Convexo	En cualquier punto	Virtual, menor y derecha

Cóncavo - p > 2f - Real, menor e invertida



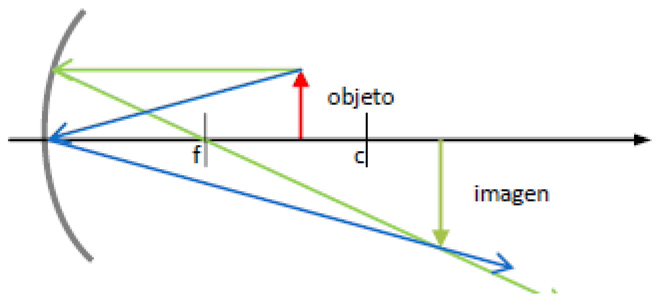
X > c Real, invertida, menor

Cóncavo - p = 2f - Real, igual e invertida



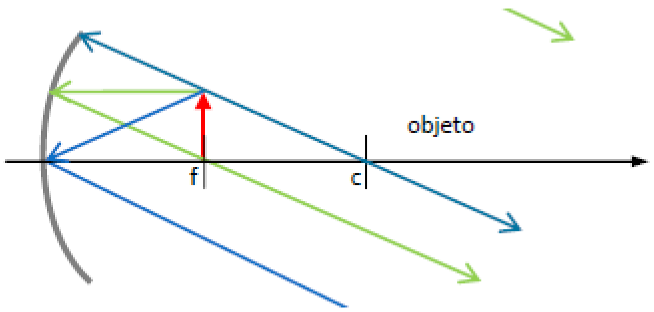
X = c Real, invertida, igual

Cóncavo - f < p < 2f - Real, mayor e invertida



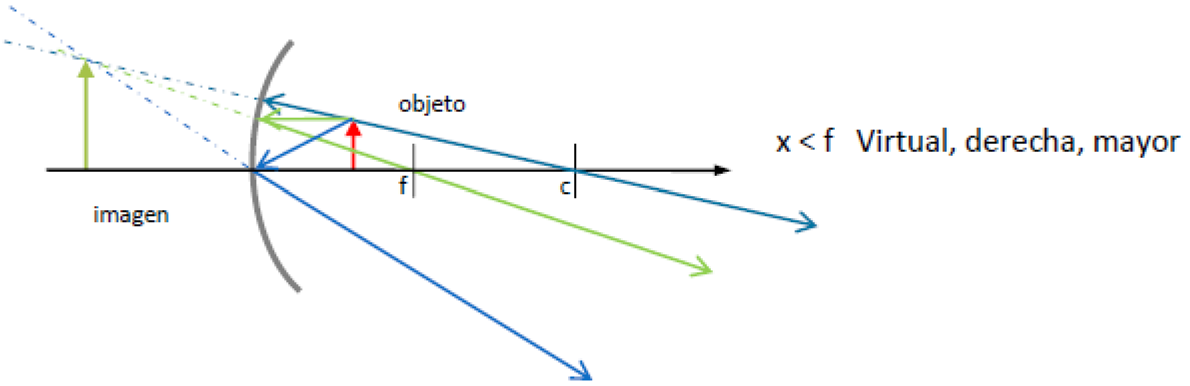
f < X < c Real, invertida, mayor

Cóncavo - p = f - No se forma imagen



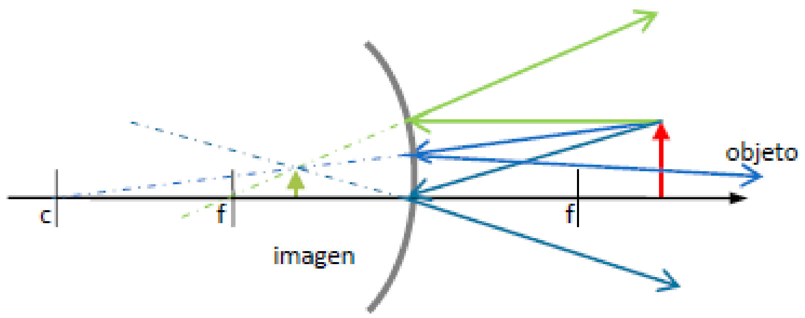
x = f No existe imagen

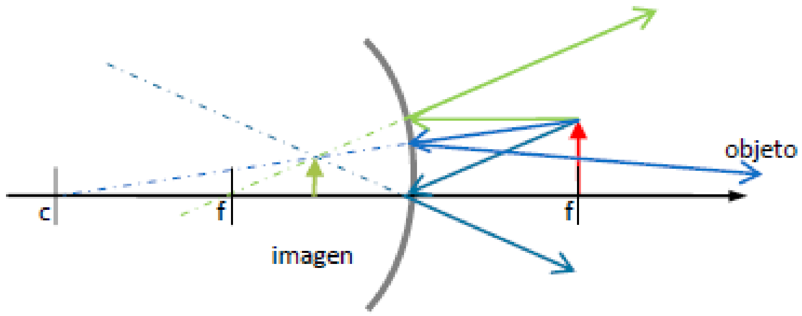
Cóncavo - p < f - Virtual, mayor y derecha

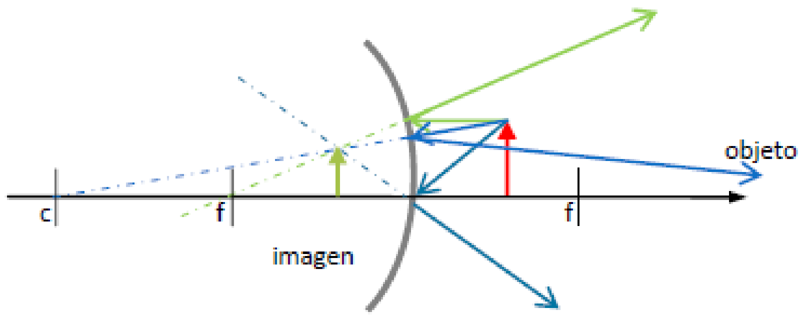


Convexo - Virtual, menor y derecha

La imagen en espejos convexos siempre es virtual, menor, derecha y está entre el foco y el polo







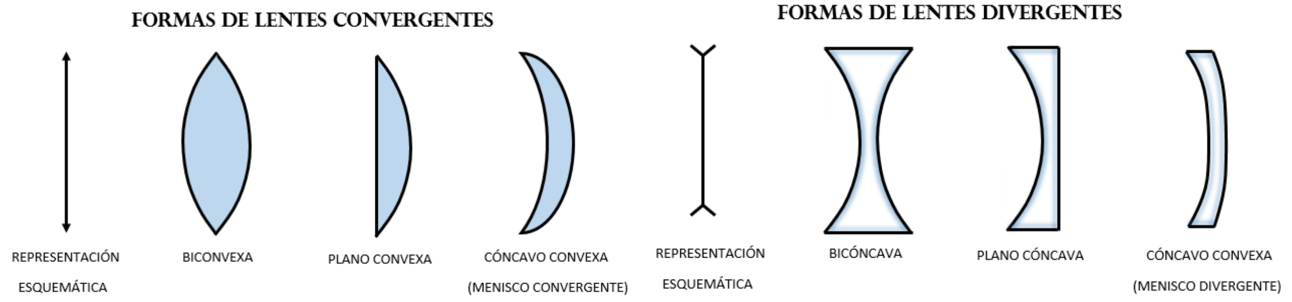
Lentes

VER https://www.geogebra.org/m/EQgbp4mt

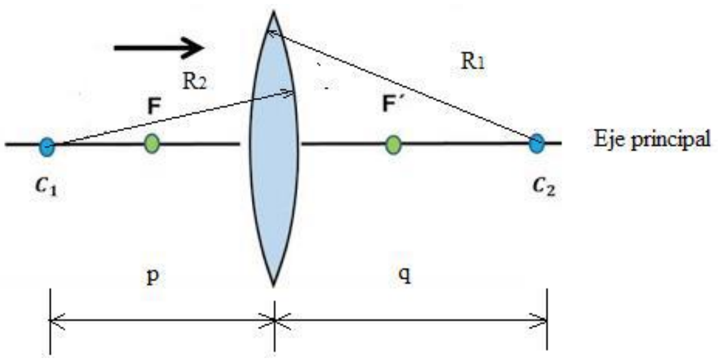
Es un medio transparente y homogéneo, limitado por dos superficies, una de ellas por lo menos, curva. Al ser atravesados por un rayo luminoso, éste se refracta.

Clases de lentes

- **Lentes convergentes.** Son de mayor espesor en el centro que en los bordes.
- **Lentes divergentes.** Son más delgadas en el centro que en los bordes.



Elementos de una lente



Centros de curvatura C1 y C2
Son los centros geométricos de las superficies curvas que limitan el medio transparente.
El eje principal es la línea imaginaria que une los centros de curvatura.
Centro óptico O es el punto de intersección de la lente con el eje principal (el centro físico de la lente)
Foco F y F' son los puntos del eje principal donde pasan los rayos refractados en la lente, que provienen de rayos paralelos al eje principal.
Distancia focal f y f' es la distancia entre el foco y el centro óptico **O**

Siendo:

- p = distancia del objeto a la lente.
- q = distancia de la imagen a la lente
- f' = distancia focal.

Ecuaciones de las lentes

Ecuación de los fabricantes de lentes

Relaciona la distancia focal de una lente con su índice de refracción y los radios de curvatura de sus superficies.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Ecuación de las lentes delgadas

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Aumento lateral de la imagen

Un aumento positivo significa una imagen derecha y uno negativo, una imagen invertida.
El aumento total de un sistema de lentes es igual al producto de los aumentos de cada una de las lentes.

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

Potencia de una lente

La potencia de varias lentes en contacto es igual a la suma de la potencia de cada una de ellas

$$P = \frac{1}{f}\ [dioptrías]$$

Signos

Cantidad	Positivo	Negativo
Ubicación del objeto (**p**)	El objeto está delante de la lente (**objeto real**)	El objeto está detrás de la lente (**objeto virtual**)
Ubicación de la imagen (**q**)	La imagen está detrás de la lente (**imagen real**)	La imagen está delante de la lente (**imagen virtual**)
R_1 y R_2	El centro de curvatura está detrás de la lente	El centro de curvatura está delante de la lente
Distancia focal (**f**)	La lente **convergente**	Lente **divergente**
Altura de la imagen (**h'**)	La imagen es **vertical**	La imagen está **invertida**

Formación de imágenes

La construcción de imágenes en las lentes, se realizan aplicando las tres propiedades siguientes:

1. Todo rayo **paralelo** al eje principal, se refracta pasando por el foco.
2. Todo rayo que pasa por el **centro óptico**, no se desvía.
3. Todo rayo que pasa por el **foco**, se refracta paralelo al eje principal.

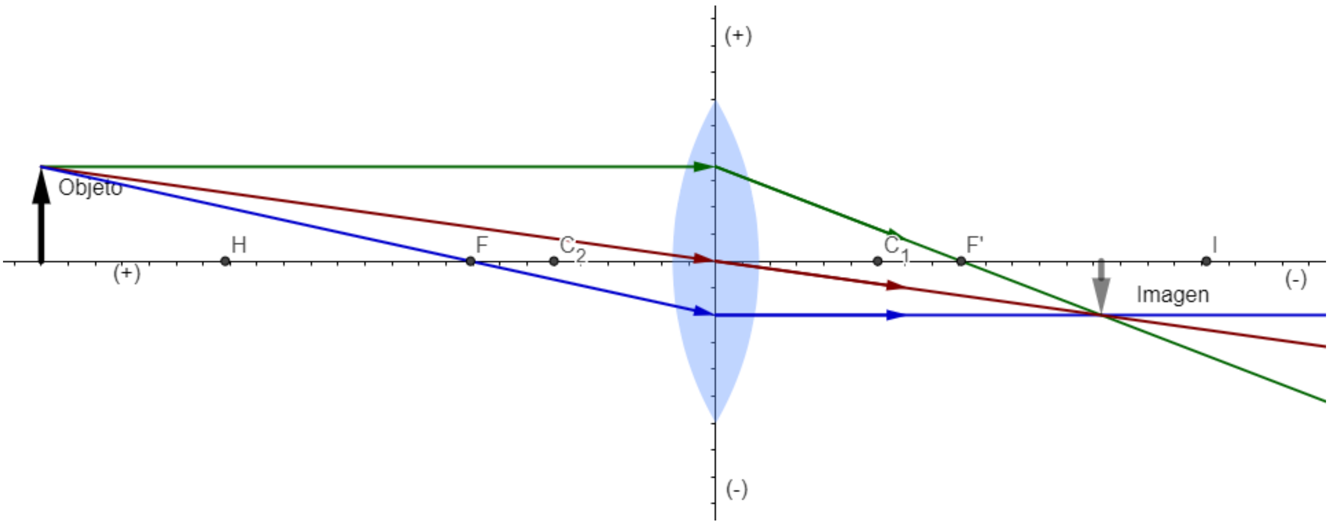
- No existe imagen cuando **p = f** (la imagen se forma al infinito)
- No se pueden obtener imágenes reales en una lente divergente.

Tipos de imágenes

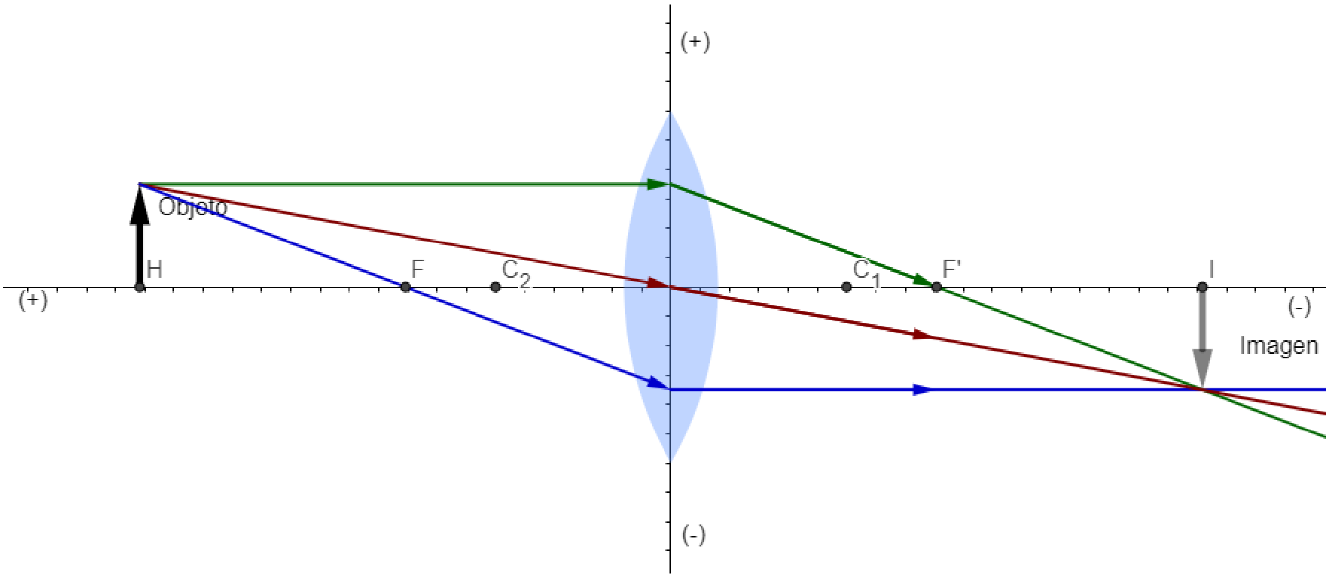
- **Imagen real**, es cuando está formada sobre los propios rayos. Estas imágenes se pueden recoger sobre una pantalla.
- **Imagen virtual**, es cuando está formada por la prolongación de los rayos, y no se puede recoger sobre una pantalla.

Clase de lente	**Situación del objeto**	**Características de la imagen**
Convergente	$p > 2f$	Real, menor e invertida
Convergente	$p = 2f$	Real, igual e invertida
Convergente	$f < p < 2f$	Real, mayor e invertida
Convergente	$p = f$	No se forma imagen (se forma en el infinito)
Convergente	$p < f$	Virtual, mayor y derecha
Divergente	En cualquier punto	Virtual, menor y derecha

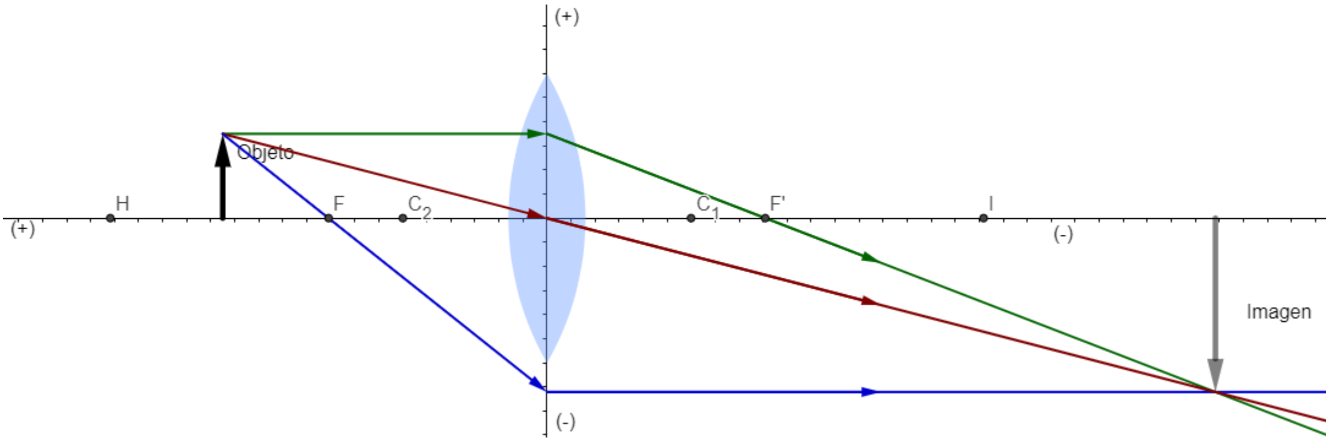
Convergente - $p > 2f$ - Real, menor e invertida



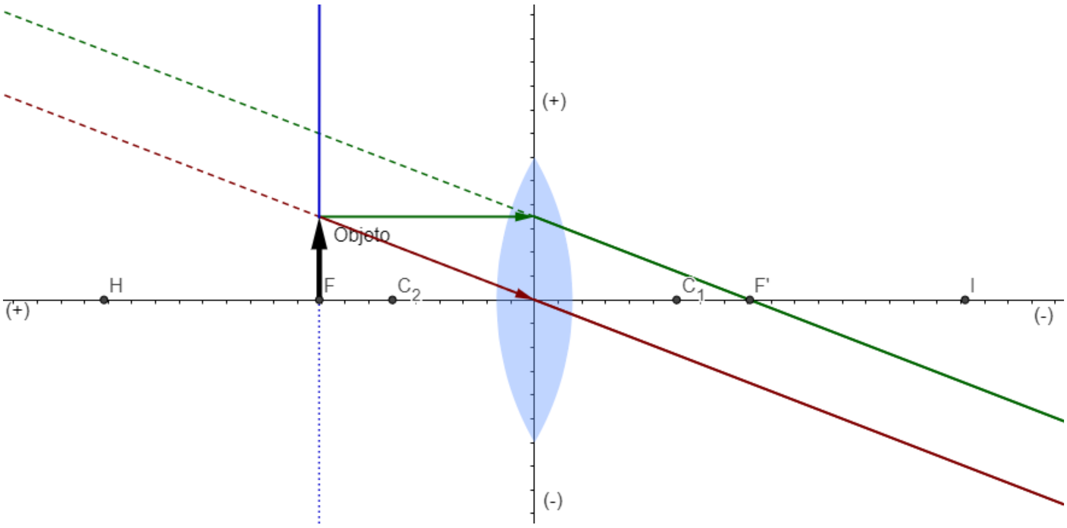
Convergente - p = 2f - Real, igual e invertida



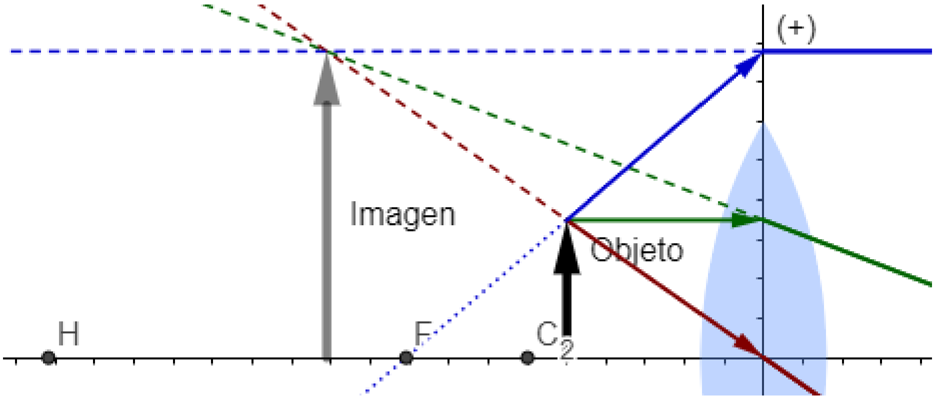
Convergente - f < p < 2f - Real, mayor e invertida



Convergente - p = f - No se forma imagen



Convergente - p < f - Virtual, mayor y derecha



Divergente - En cualquier punto - Virtual, menor y derecha

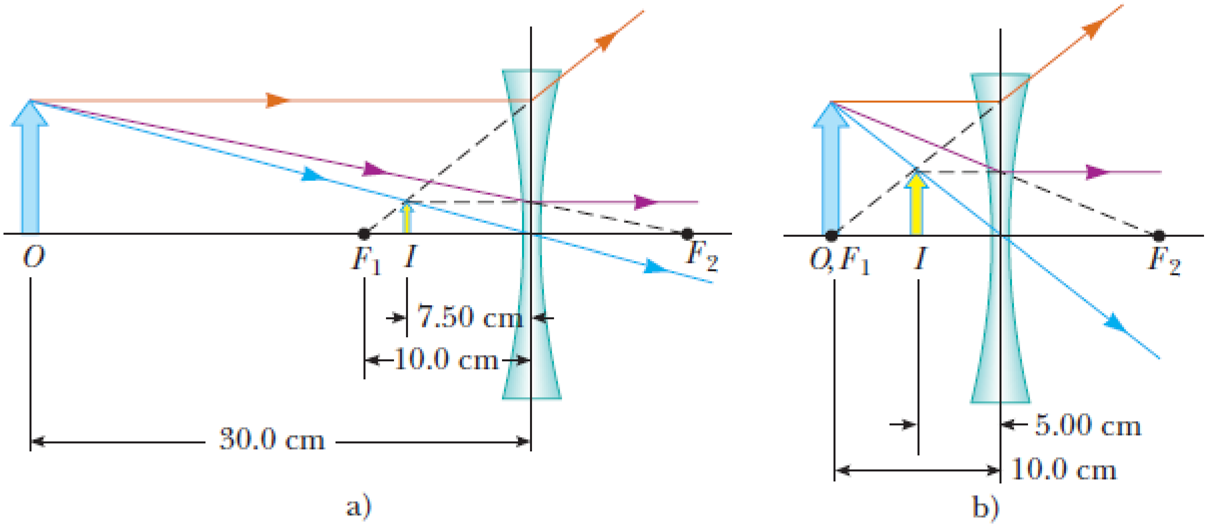
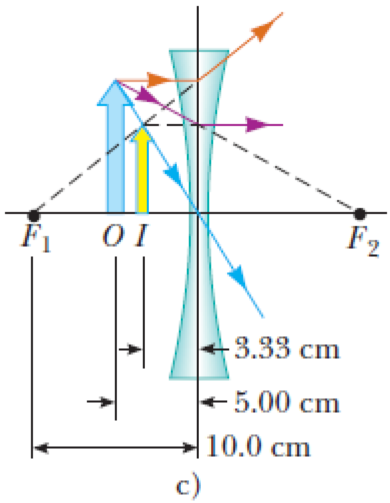
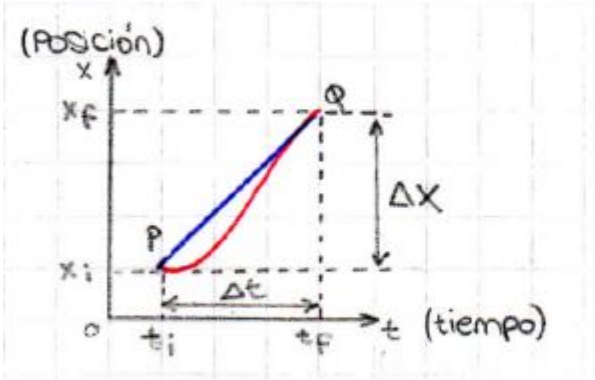


Imagen formada por una lente divergente.
a) El objeto está más alejado de la lente que el foco.
b) El objeto está en el foco.
c) El objeto está más cerca de la lente que el foco.



Cinemática

Desplazamiento y velocidad



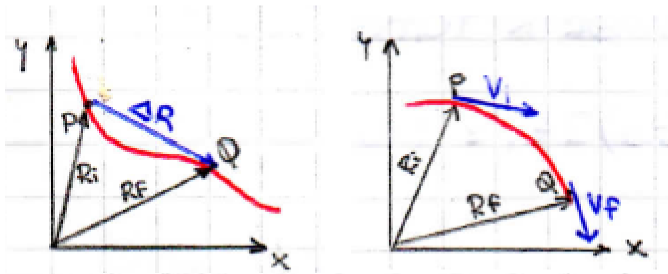
En una dimensión

La velocidad media está dada por la relación de variación de desplazamiento en función al intervalo de tiempo en el que ocurre el desplazamiento.

- **Desplazamiento:** $\Delta x = x_f - x_i$
- **Vel. Prom:** $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

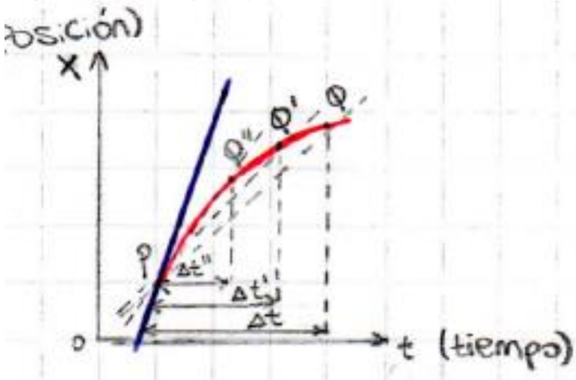
*La velocidad promedio es igual a la pendiente de la recta secante entre **P** y **Q***

En dos dimensiones



- **Vector Desplazamiento:** $\Delta R = R_f - R_i$
- **Vel. Prom:** $\vec{v} = \frac{\Delta R}{\Delta t}$

Velocidad Instantánea y Rapidez



En una dimensión

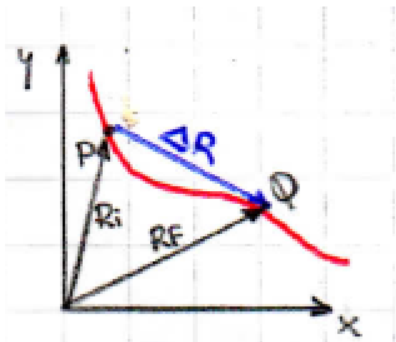
- **Vel. Inst:** $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

*Conforme **Q** se acerca a **P**,* $\Delta t \to 0$ y la recta secante entre **P** y **Q** tiende a la recta tangente al punto **P**.

- **Rapidez:** $|v|$

La rapidez es el valor absoluto de la velocidad.

En dos dimensiones



- **Vel. Inst:** $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{dR}{dt}$

Aceleración

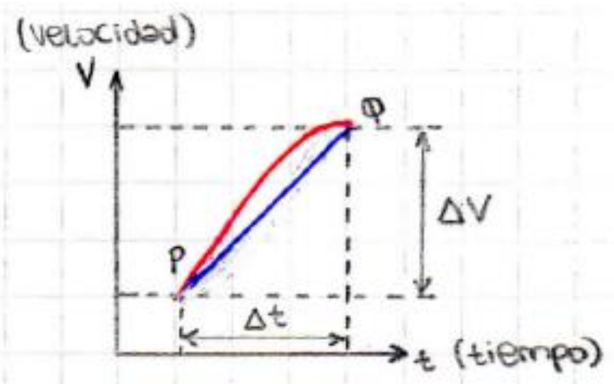
- **Acel. Prom:** $\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

*Es igual a la pendiente de la recta secante entre **P** y **Q**.*

- **Acel. Inst:** $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

La aceleración siempre se analiza independientemente para cada eje de la dimensión donde se esté estudiando el movimiento.

- **Acel. Vectorial:** $\vec{a} = (a_x\ , a_y)$



Ecuaciones comunes

$$X(t) = Xo + Vo \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$$

$$V(t) = Vo + a \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} V(t)dt$$

$$v_f^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$

*Para **MRU** considerar* $a = 0$ *.*

Caída Libre / Tiro vertical

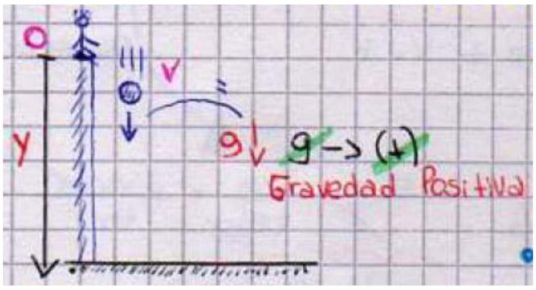
La caída libre es un caso especial de movimiento con aceleración constante. La magnitud de la aceleración debida a la gravedad es una cantidad positiva. La aceleración de un cuerpo en caída libre siempre es hacia abajo.

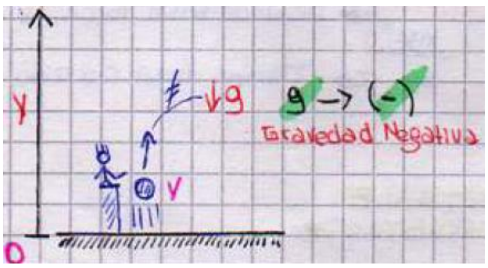
$$a_y = -g = -9{,}81 m/s$$

*Para **caída libre** tomamos la **gravedad** como **POSITIVA**, y para **tiro vertical** como **NEGATIVA***

Altura máxima: $hmáx = \frac{vo^2}{2 \cdot g}$

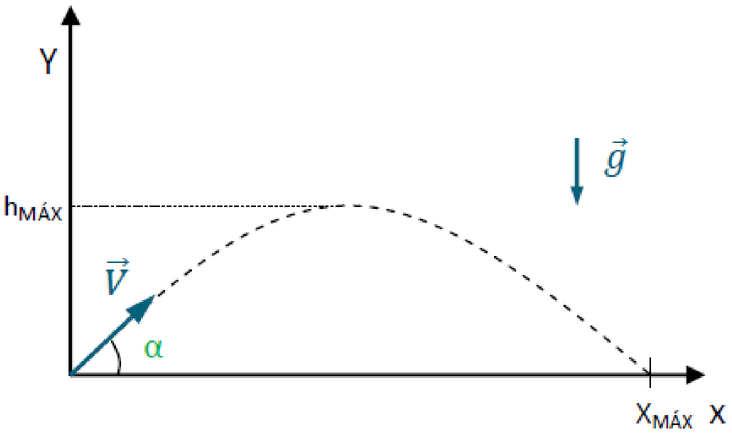
Tiempo de vuelo: $tvuelo = 2 \cdot \frac{Vo}{g}$





Tiro oblicuo/parabólico

La curva que describe un proyectil se debe analizar en sus dos ejes, en dirección X tenemos (idealmente) **MRU** y en la dirección Y tenemos **MRUV**, con una aceleración igual a **-g**



$$Vx(t) = Vox = Vo \cdot \cos\alpha$$

$$Voy = Vo \cdot sen\,\alpha$$

$$Vy(t) = Voy + g \cdot \Delta t$$

$$x(t) = Xo + Vx \cdot \Delta t$$

$$y(t) = Yo + Voy \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot g\Delta t^2$$

Fórmulas asociadas al tiro parabólico

$$Y = tg\,\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2V_o^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

- **Altura máxima:** $hmax = \frac{V_o^2\, sen^2\alpha}{2g} = \frac{V_y^2}{2g}$
- **Tiempo de vuelo:** $tvuelo = 2\frac{V_o sen\alpha}{g}$
- **Vel Final:** $(V_o \cos\alpha\ ;\ V_o sen\alpha\ - g\ t)$
- **Alcance:** $Xmax = 2\frac{V_x\, V_y}{g} = 2\frac{V_o^2\ sen\ \alpha\ \cos\alpha}{g} = \frac{V_o^2\ sen\ 2\alpha}{g}$

Movimiento Circular

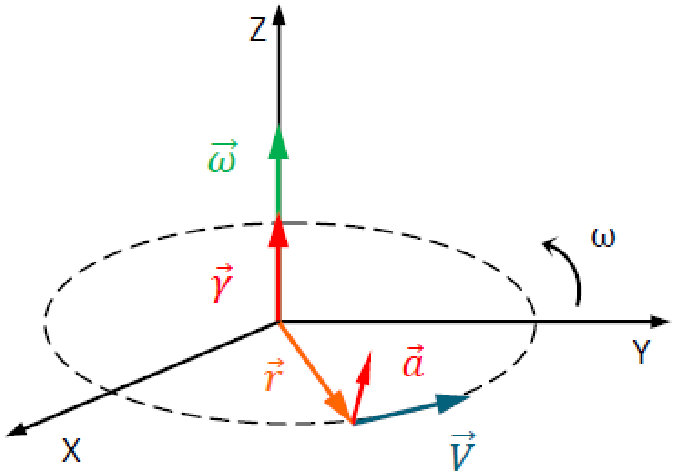
En el movimiento circular partimos de un sistema de coordenadas completamente distinto.
Algo muy importante es que estos sistemas tienen algo denominado aceleración normal o centrípeta que se da en todos los casos de movimiento circular, es algo característico del movimiento en sí, debido a que varía la dirección de la velocidad tangencial. **nota del gráfico y ec. sig:** $\alpha = \gamma$

Siendo:

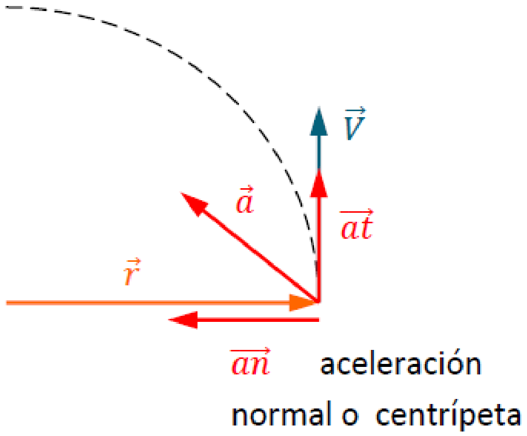
$\vec{\omega}$ la velocidad angular [rad/seg];
$\vec{\gamma}$ la aceleración angular [rad/seg^2] y
$\vec{r}$ el vector posición (su norma es el radio de la circunferencia)

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\gamma} \times \vec{r}}_{at} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{V}}_{an}$$



Aceleración tangencial y normal:



La aceleración tangencial es la que cambia el módulo del vector velocidad y la aceleración normal o centrípeta (que apunta al centro de la circunferencia) es la que hace cambiar el sentido de la velocidad, permitiendo que el móvil describa una trayectoria circular. Incluso si se trata de un MCU, por más que no haya aceleración tangencial, sí hay aceleración centrípeta.

El vector de aceleración del Movimiento Circular está descrito así:

$$\vec{a} = (a_n , a_t) = a_n \,\hat{\theta} + a_t \,\hat{r} \text{ y su magnitud: } |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Sus componentes:

- **Aceleración Tangencial:** se debe al cambio en la **magnitud** de la velocidad:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha . r$$

- **Aceleración Normal:** se debe al cambio en el **sentido** de la velocidad:

$$a_n = \frac{V_t^2}{r} = \omega^2 . r$$

Velocidad y Aceleración angular

Velocidad angular: Variación del desplazamiento angular por unidad de tiempo.

- **Velocidad angular promedio:** $\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$

- **Velocidad angular instantánea:** $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

Aceleración angular: Variación de la velocidad angular angular por unidad de tiempo.

- **Aceleración angular promedio:** $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$

- **Aceleración angular instantánea:** $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Desplazamiento

El desplazamiento angular (variación del ángulo) se representa con: θy se mide en radianes. Otro desplazamiento que podemos encontrar es dado por el arco de circunferencia:

$$\Delta s = r \cdot \Delta\theta$$

Ecuaciones

$$\theta(t) \;=\; \theta_o + \omega_o\,\Delta t + \frac{\alpha\,\Delta t^2}{2}$$

$$\omega(t) \;=\; \omega_o + \alpha_o\,\Delta t$$

$$\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$$

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad a_n = \frac{V_t^2}{r} = \omega^2 . r \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha . r$$

Siempre hay que verificar que la calculadora esté en radianes o grados según como estemos trabajando.
Tener en cuenta lo siguiente:

- **Frecuencia**: La frecuencia mide la cantidad de vueltas que se dan en un período de tiempo.

$$f = \frac{cant.\,vueltas}{tiempo}$$

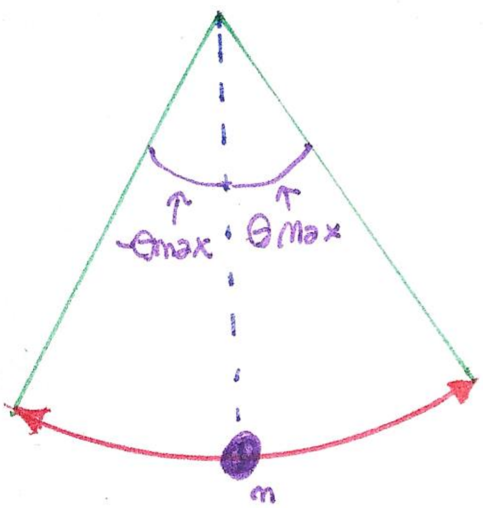
- **Período**: El período mide el tiempo que se tarda en dar una vuelta completa y se mide en segundos. Es la inversa de la frecuencia.

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Movimiento circular armónico

$$\theta(t) = \theta_{max}\,cos(\frac{2\pi}{T}\,\Delta t)$$

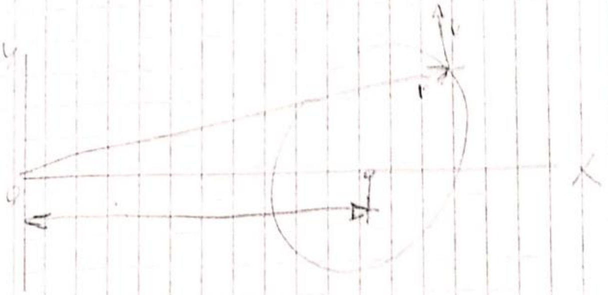
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta_{max}\frac{2\pi}{T}\,sen(\frac{2\pi}{T}\,\Delta t)$$



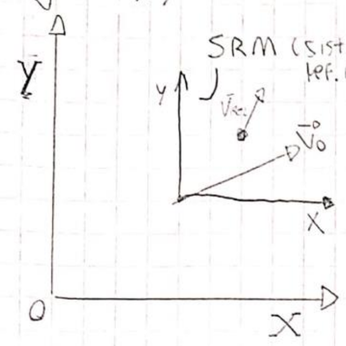
Movimiento Relativo

$\boxed{\text{Mov Relativo}}$:

SRF → sist. de ref fijo
XY



SRM (sist. ref. móvil)



2 sist ref:

Fijo (Letras mayúsculas) (X Y)

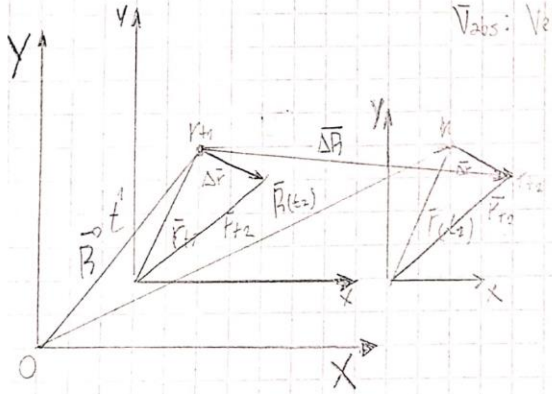
Movil (sist xy)

$\vec V_0$: velocidad del SRM respecto a SRF

$\vec V_{Rel}$: Veloc. partícula relativa a SRM

$\vec V_{abs}$: Veloc. partícula relativa a SRF

$$\vec V_{abs} = \vec V_{Rel} + \vec V_0$$



$\vec R_{(t_1)}$ posición en SRF

$\vec r_{(t_1)}$ posición

$$\Delta \vec R_0 = \vec R_{t_2} - \vec R_{t_1}$$

$$\Delta \vec r = \vec r_{t_2} - \vec r_{t_1}$$

$$\Delta \vec R = \Delta \vec R_0 + \Delta \vec r$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec R}{\Delta t}}_{\vec V_F} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec R_0}{\Delta t}}_{\vec V_0} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta t}}_{\vec V_r}$$

$\vec V_F = \vec V_0 + \vec V_r$ → Suma vectorial.
└ Vel. objeto en el SRF (Vel. absoluta)

$\vec V_0$ → Vel del SRM respecto al SRF

$\vec V_r$ → Vel objeto respecto al SRM

Dinámica

Leyes de Newton

Las tres leyes de Newton, son las leyes que rigen una gran parte de la mecánica clásica. Estas solo son **válidas** en un **sistema de referencia inercial (SRI)**. Estas tres leyes son:

Primera Ley: de la inercia

La primera ley de Newton dice que, si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo (la fuerza neta) es cero, el cuerpo está en equilibrio y tiene aceleración cero. Si el cuerpo está inicialmente en reposo, permanece en reposo; si el cuerpo está inicialmente en movimiento, sigue moviéndose con velocidad constante. Esta ley es válida en marcos de referencia inerciales. Donde:

$$\Sigma\vec{F} = 0$$

Caso de aplicación:
Cuando un cuerpo está en equilibrio en un marco de referencia inercial, es decir, en reposo o en movimiento con velocidad constante, la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él debe ser cero. Los diagramas de cuerpo libre son indispensables para identificar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cuestión.
La fuerza normal ejercida por una superficie sobre un cuerpo no siempre es igual al peso del cuerpo, en el caso de movimiento circular uniforme.

Segunda Ley: del movimiento

Las propiedades inerciales de un cuerpo se caracterizan por su masa. La aceleración de un cuerpo bajo la acción de un conjunto de fuerzas dado es directamente proporcional a la suma vectorial de las fuerzas (la fuerza neta) e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Esta relación es la segunda Ley de Newton. Al igual que la primera ley, esta solo es válida en marcos de referencia inerciales. La unidad de fuerza se define en términos de las unidades de masa y aceleración. Donde:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\Sigma\vec{F}_x = ma_x$$

$$\Sigma\vec{F}_y = ma_y$$

$$\Sigma\vec{F}_z = ma_z$$

Caso de aplicación:
Si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo no es cero, el cuerpo tiene una aceleración relacionada con la fuerza neta por la segunda ley de Newton.
Al igual que en los problemas de equilibrio, los diagramas de cuerpo libre son indispensables para resolver problemas donde interviene la segunda ley de Newton y la fuerza normal ejercida sobre un cuerpo no siempre es igual a su peso.

Tercera Ley: acción reacción

La tercera ley de Newton dice que cuando dos cuerpos interactúan, ejercen fuerzas uno sobre otro que en todo instante son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Estas fuerzas se denominan fuerzas de acción-reacción y cada una actúa sólo sobre uno de los dos cuerpos: nunca actúan sobre el mismo cuerpo. en

$$\vec{F} = -\vec{F}$$

$$\vec{F}_{AsobreB} = -\vec{F}_{BsobreA}$$

A toda fuerza, está presente otra fuerza opuesta que se opone a la primera.

Definiciones

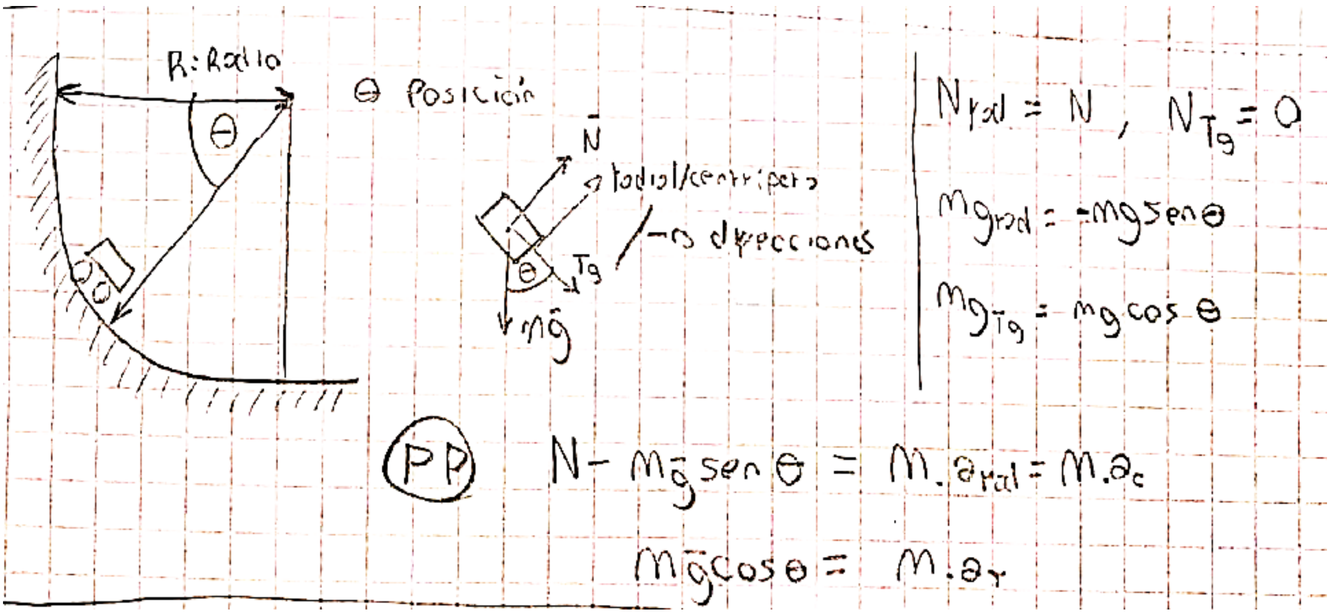
Sistema de Referencia Inercial

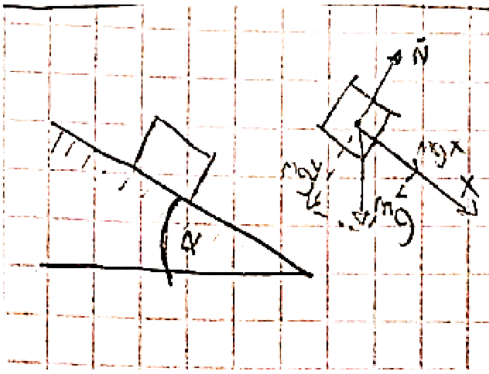
Sistema de referencia en reposo o con MRU donde se cumplen las leyes de movimiento enunciadas por Newton. La aceleración del sistema debe ser nula, y la aceleración de los objetos será en referencia a este sistema. Un **Sistema de Referencia No Inercial** es aquel que tiene aceleración.

Fuerza Inercial

Se llaman fuerzas de inercia (o fuerzas ficticias) a las fuerzas que explican la aceleración aparente de un cuerpo visto desde un sistema de referencia no inercial.

Descomposición de fuerzas





$N_x = 0 \quad N_y = N$

$mg_x = mg\,sen\,\varphi$

$mg_y = -mg\cos\varphi$

$a_x = a,\ a_y = 0$

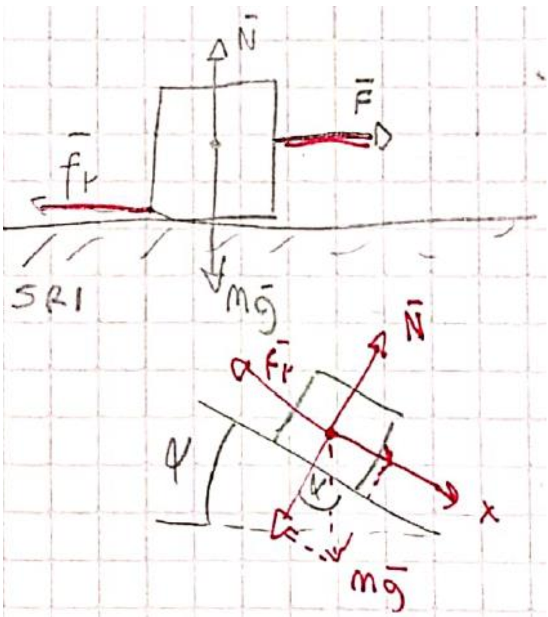
$mg\,sen\,\varphi = ma$

$N - mg\cos\varphi = 0$

Fuerzas de rozamiento

Fuerza de rozamiento estático

También nombrado fuerza equilibrante o equilibrio relativo



PP) como calculo $\bar{F}_r$?

— $F_r = F$ → si es SRI

— $F_r = ma$ → NO SRI

$F_r = mg\,sen\,\varphi \qquad \mu_s = \dfrac{sen\,\varphi_{máx}}{\cos\varphi_{máx}} = \tan\varphi_{máx}$

$N = mg\cos\varphi$

$F_{MAX} = \mu_s\, m\bar{g}\cos\varphi_{máx}$

Con esta última ecuación podemos calcular la constante de fricción estática con un ensayo de laboratorio.

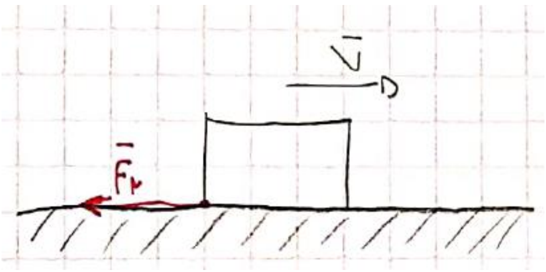
- $\bar{F}_{MAX}$ es la fuerza que vence a $\bar{F}_r$

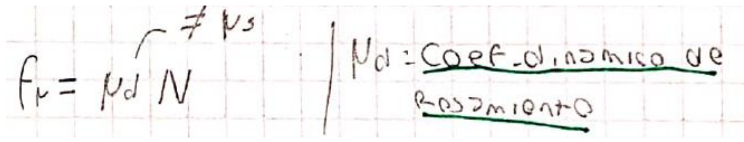
$F_{MAX} = \mu_s \cdot N$

└ coef. estático de rozamiento.

Esta fuerza de fricción entra en juego si el objeto NO está en reposo. (Ver gráfico más adelante)

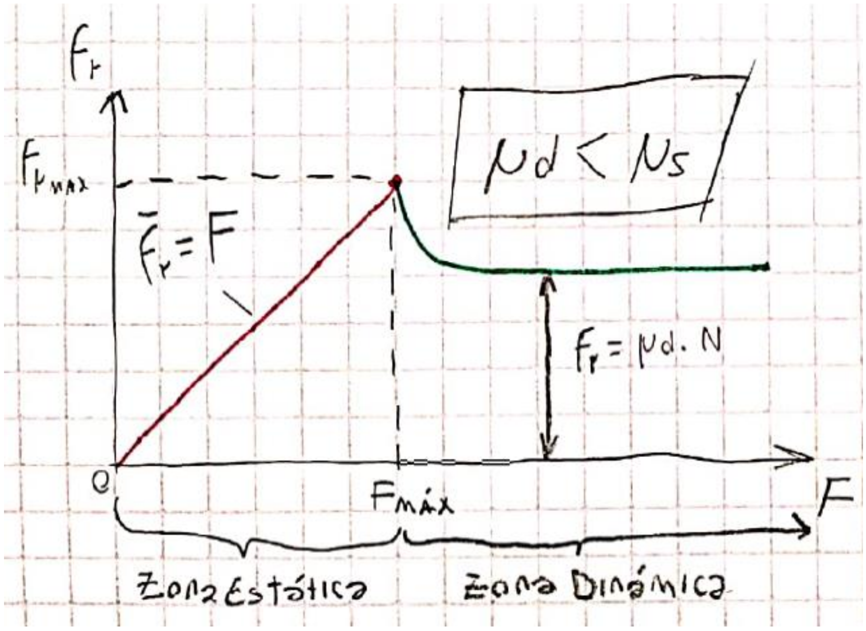
Fuerza de rozamiento dinámica





Pregunta de parcial:
Fmax NO ES la fuerza de rozamiento!

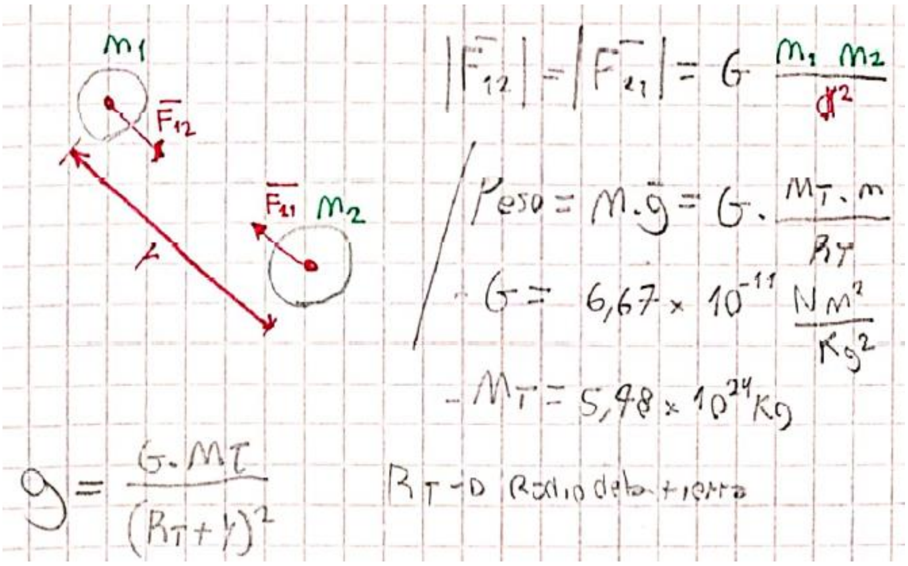
El gráfico que asocia cuando interactúa una constante y cuando otra es el siguiente:

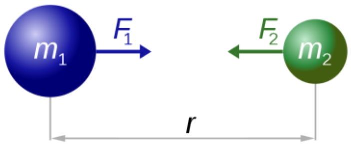


En la zona estática el objeto no se mueve porque la fuerza aplicada al objeto (F [eje X]) no venció a la fuerza de fricción máxima.
En la zona dinámica el objeto está en movimiento, e interactúa el coeficiente dinámico de rozamiento que es menor al coeficiente estático de rozamiento.

Ley de Gravitación

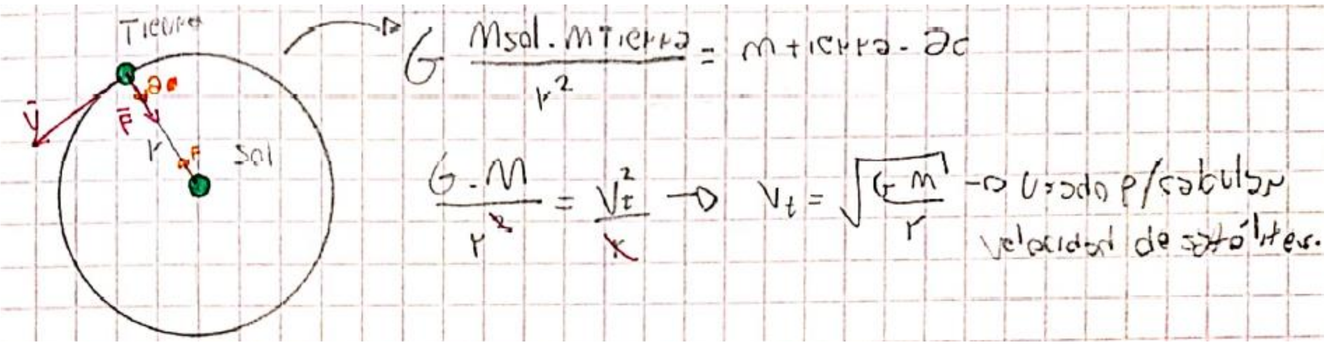
La gravitación describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa.



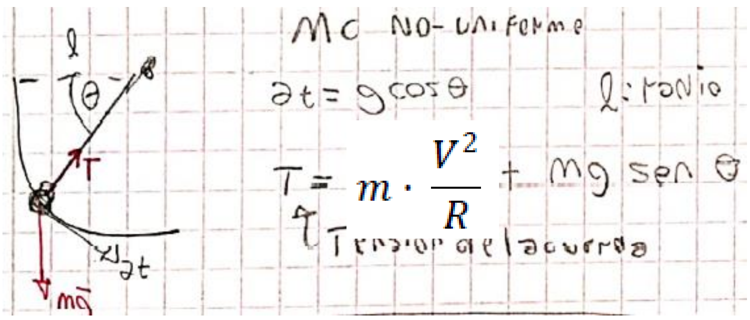


$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$$



2da ley de newton al mov. circular



En el movimiento circular uniforme, el vector aceleración apunta al centro del círculo.

El movimiento se rige por la segunda ley de Newton.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{rad}$$

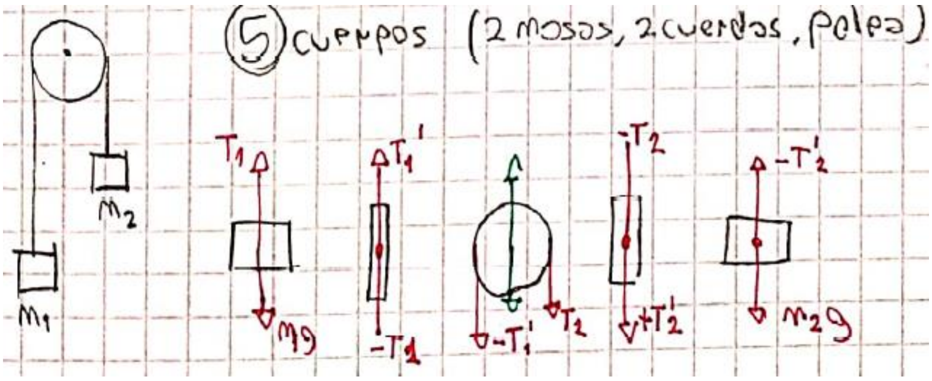
Aceleración en movimiento circular uniforme

$$a_{rad} = \frac{V^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T}$$

Donde T es el periodo.

Máquina de Atwood (POLEAS)

Definimos en un sistema de poleas 5 cuerpos individuales, si nosotros despreciamos las masas de la cuerda en ambos lados de la polea, y la masa de la polea misma, podemos hacer una simplificación de las fuerzas tal que:



+ $T_1 \cong T_1'$, $T_2 \cong T_2'$ (Consideramos las masas de las cuerdas como muy chicas)

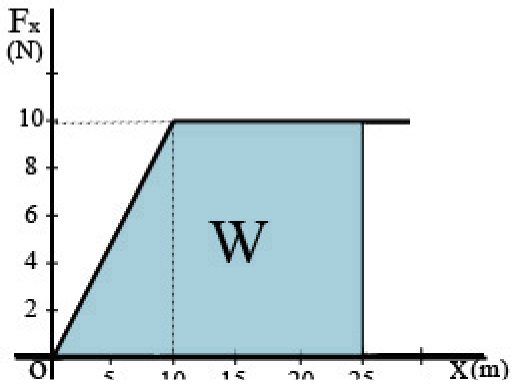
+ Consideramos la masa de la polea como muy chica.

$$T_1 \cong T_2$$

↳ $m_1 g \simeq m_2 g$

Trabajo y Energía

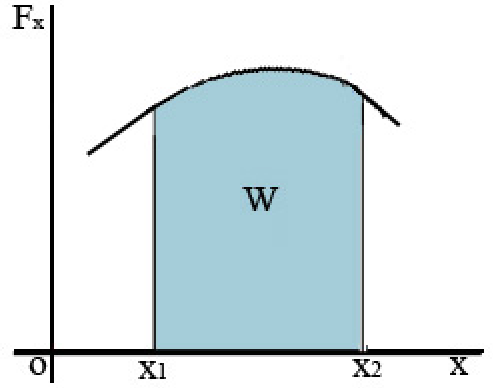
Trabajo



- Es una magnitud ESCALAR
- Es el producto escalar de dos magnitudes vectoriales

$$dW = \overrightarrow{F_{(r)}} \times \overrightarrow{dr}$$

Diferencial de trabajo L de la fuerza F es igual al producto escalar de la
fuerza en cuestión por el diferencial desplazamiento



$$W = \int_{r_1}^{r_2} \overrightarrow{F_{(r)}} \times \overrightarrow{dr} \qquad [J][Nm]$$

Esencialmente es el área demarcada en los gráficos al costado.

Teorema del trabajo y la energía

Una partícula de masa **m** se mueve hacia la derecha bajo la acción de una fuerza neta constante **F**. Como **F** es constante, por la segunda ley de newton sabemos que la partícula se moverá con aceleración constante **a** si la partícula se desplaza una distancia **s** el trabajo neto efectuado por la fuerza es de:

$$Wneto \ = \ Fs \ = \ m \times a \times S$$

$$Wneto \ = \ m \times \left(\frac{V_f \ - \ V_i}{t}\right) \times \frac{(V_i \ + \ V_f) \ t}{2} = \frac{m \, V_f^2}{2} - \frac{m \, V_i^2}{2}$$

Con esta última expresión definimos a la Energía Cinética

$$Ec = \frac{m \, v^2}{2}$$

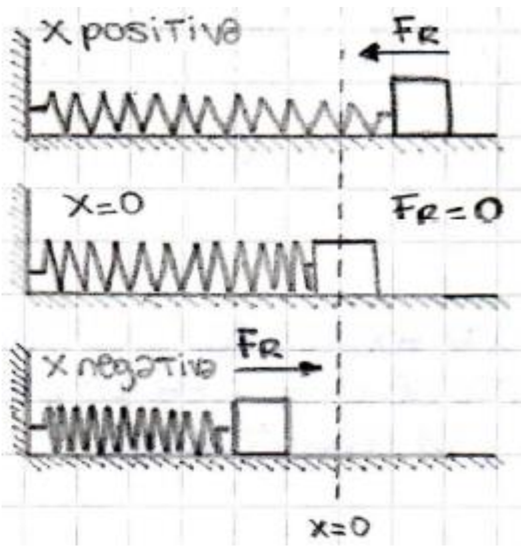
Definición

El trabajo efectuado por una fuerza neta constante al desplazarse una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula.

$$Wneto = Ec_f - Ec_i = \Delta Ec$$

Este teorema es válido aun cuando la fuerza varíe. También establece que la velocidad de la partícula aumentará si se le aplica un trabajo positivo y viceversa. **La velocidad y energía cinética de una partícula cambian solo si el trabajo sobre la partícula lo realiza una fuerza externa.**

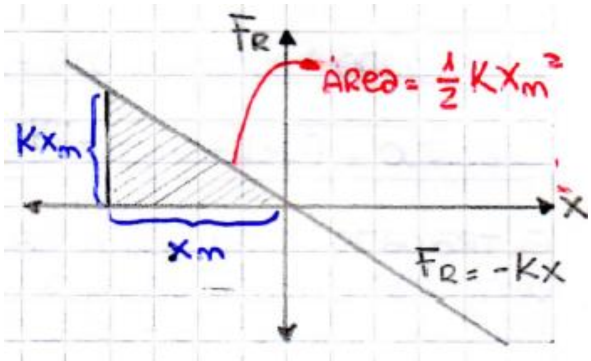
Trabajo de un resorte (LEY DE HOOKE)



Si el resorte se alarga o se comprime una pequeña distancia desde su configuración indeformada de equilibrio, este ejercerá una fuerza sobre el cuerpo denominada fuerza restauradora, y está dada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{F_e = -kx}$$

donde **k** es la constante de fuerza del resorte, que mide esencialmente la rigidez de este.



Si suponemos que el cuerpo se empuja hacia la izquierda una distancia Xm desde el equilibrio y se suelta, el trabajo realizado por la fuerza del resorte será:

$$W_e = \int_{x_i}^{x_f} F_e\,dx = \int_{-x_m}^{0} (-kx)\,dx = \boxed{\frac{1}{2} k x_m^2}$$

Si el cuerpo experimenta un desplazamiento arbitrario de **X = Xi** a **X = Xf** el trabajo hecho por la fuerza del resorte es:

$$\boxed{W_R = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2}$$

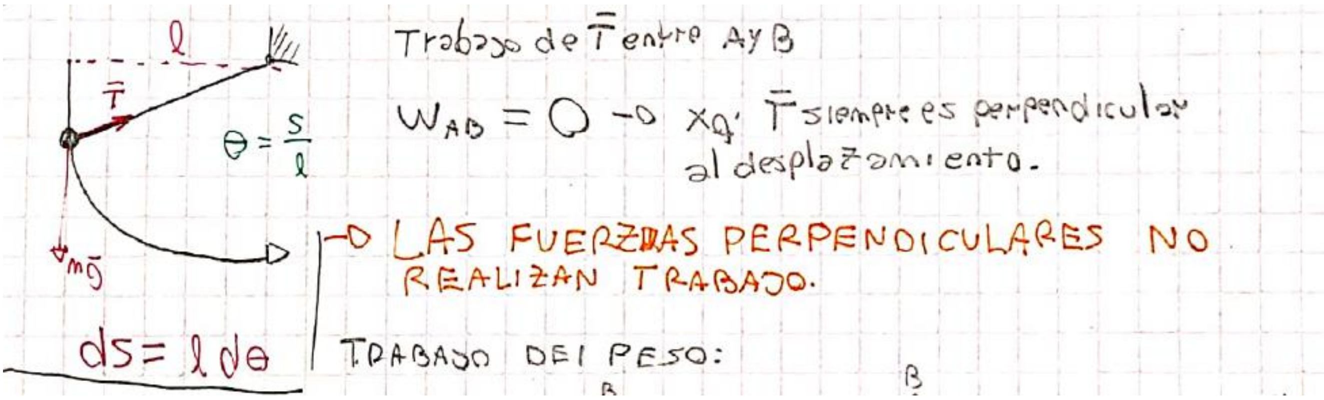
Con la ecuación anterior podemos definir a:

Energía Potencial Elástica

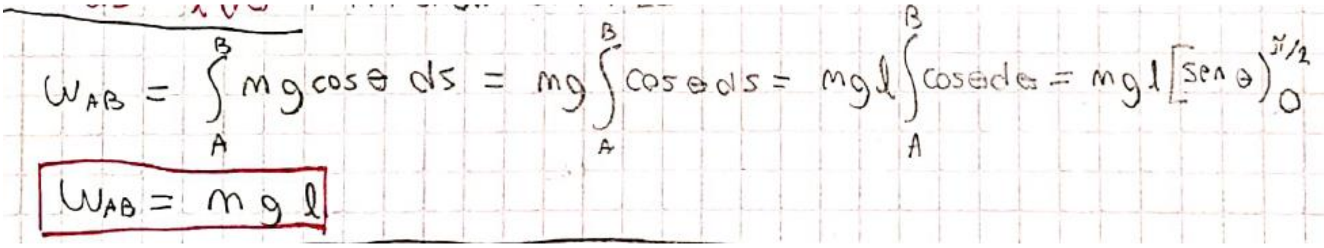
$$Epe = \frac{K\,X^2}{2}$$

Trabajo en Mov. Circular

Demostrado con el ejemplo de una masa que se balancea desde un punto de mayor altura a uno de menor altura:



Por lo que podemos definir que el único trabajo presente en esta carga va a ser efectuado por la fuerza peso.



Trabajo del peso / Energía potencial gravitatoria

El peso es una **fuerza conservativa.**
Con la expresión anterior queda definida la energía potencial ya que **l** representa el cambio de altura del objeto:

$$Epg = mgh$$

Pero como la **altura** es algo **relativo**, tenemos que definir un punto en el cual la energía cinética es **0**
Por eso siempre que trabajemos con energía potencial tenemos que definir una altura donde Ep = 0.

El trabajo realizado por el peso sería la variación de esta energía:

$$Wmg = -\Delta Epg$$

y tiene signo **negativo** ya que es una fuerza que atrae el objeto hacia abajo.

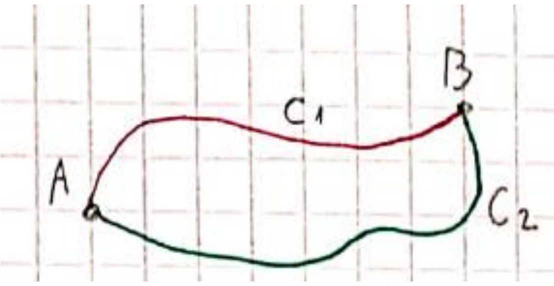
Energía Cinética

La energía cinética quedó antes definida en el teorema del trabajo y la energía.

$$Ec = \frac{m\,V^2}{2}$$

Fuerzas conservativas y no conservativas

Las fuerzas conservativas son aquellas en las que el trabajo a lo largo de un camino cerrado es nulo. El trabajo depende de los puntos inicial y final y no de la trayectoria. Son fuerzas conservativas la fuerza peso y la fuerza elástica.
Las fuerzas no conservativas son aquellas en las que el trabajo a lo largo de un camino cerrado es distinto de cero. Estas fuerzas realizan más trabajo cuando el camino es más largo, por lo tanto, el trabajo depende de la trayectoria. La fuerza de rozamiento es un ejemplo de fuerza no conservativa



Definimos un objeto que circula por dos trayectorias:

1. Si el **trabajo** es el **mismo** con las dos trayectorias, es una **fuerza CONSERVATIVA**

$$\int_{A\,C1}^{B} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{A\,C2}^{B} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

2. Si el trabajo realizado al recorrer en un sentido u otro un mismo recorrido, **es una fuerza CONSERVATIVA ----->**

$$\int_{A}^{B} \bar{F} d\bar{r} = -\int_{B}^{A} \bar{F} d\bar{r}$$

3. Si el objeto se desplaza de **A** a **B** y vuelve por el mismo trayecto, es una **trayectoria cerrada** y se cumple:

$$\oint \overrightarrow{F}\ \overrightarrow{dr}$$

Esencialmente hay dos tipos de fuerzas **NO-CONSERVATIVAS**:
- Las fuerzas **DISIPATIVAS:** Donde el trabajo es **negativo**.
- Las fuerzas **MOTRICES**: Donde el trabajo es **positivo.**

Energía Mecánica

Cuando analizamos las energías de un cuerpo, tenemos que analizar la sumatoria de todas las energías en cada punto, y como y cuáles son los distintos trabajos que varían a esta.
La energía mecánica esencialmente es la sumatoria de la energía de un cuerpo:

$$Em = Ec + Epe + Epg$$

Y por otro lado, el trabajo de la **fuerza resultante** es la suma del trabajo de las **fuerzas conservativas** y las **no-conservativas**

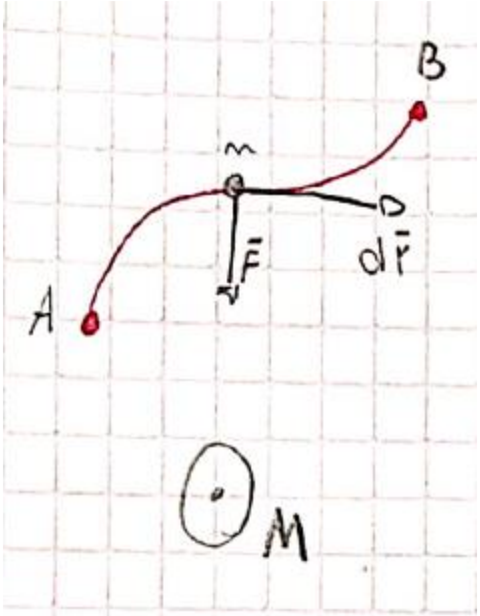
$$W_{res} = W_{FC} + W_{FNC}$$

El trabajo de las **fuerzas no-conservativas** es el que va a variar la **Energía Mecánica:**

$$W_{FNC} = \Delta Em$$

Energía Potencial Gravitacional

Como la energía potencial por sí sola es abstracta ya que es relativa a la altura que denominemos como energía potencial 0, lo que se usa frecuentemente es lo siguiente:



Definimos al trabajo realizada por la **Fuerza de atracción gravitatoria**:

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F}\ \overrightarrow{dr} = -G\ M\ m \int_A^B \frac{1}{r^2}\ \overrightarrow{dr}$$

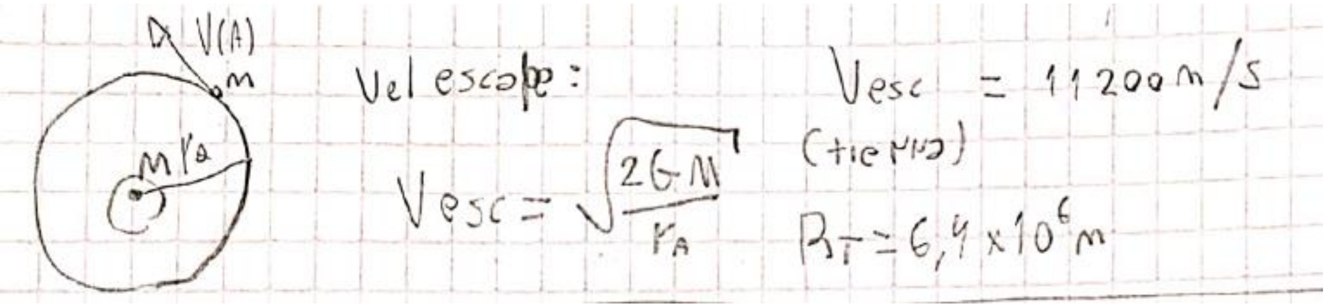
$$W_{AB} = -\left[\frac{-GMm}{r_{(b)}} - \frac{-GMm}{r_{(a)}}\right]$$

$$W_{AB} = -(Ep_B - Ep_A)$$

Y como si la distancia **r** entre los objetos es 0, la fuerza de atracción gravitatoria vale 0, podemos definir teóricamente que:

$$Ep_{(r=0)} = 0 \quad \textbf{por lo tanto} \quad Ep_{(r)} = -\frac{GMm}{r}$$

Lo anterior nos sirve para definir la **velocidad de escape** de una órbita:



Potencia

Por definición la potencia es la tasa de tiempo a la cual se realiza el trabajo:

- **Potencia promedio** $\vec{P} = \frac{W}{dt} \quad [W] \ \left[\frac{J}{s}\right] \ \left[\frac{Kg\ m^2}{s^3}\right]$

O también la tasa de transferencia de energía en el tiempo:

- **Potencia** $P = \frac{dW}{dt} \quad [W] \ \left[\frac{J}{s}\right] \ \left[\frac{Kg\ m^2}{s^3}\right]$

Si la fuerza es constante, sabemos que **W = Ft** y **dW = F.dt** entonces:

- $P = \overrightarrow{F}\ \overrightarrow{V}$

Impulso y Cantidad de Movimiento

Cantidad de movimiento

También conocido como momento lineal, ímpetu o momentum.
Por la segunda ley de newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ , entonces } \vec{F} = m \cdot \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

Luego

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot \overrightarrow{dv}$$

Integrando:

$$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F_{(t)}}\, dt = m \int_{V_0}^{V} \overrightarrow{dv}$$

$$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F_{(t)}}\, dt = m \cdot (\vec{V} - \vec{V_0})$$

$$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F_{(t)}}\, dt = m\vec{V} - m\vec{V_0}$$

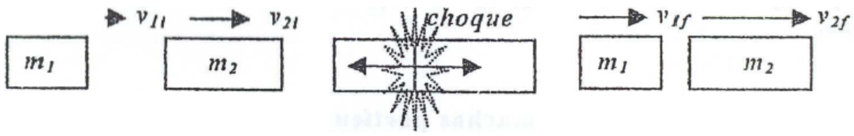
Se define a la cantidad de movimiento lineal como

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

Ley de conservación de la cantidad de movimiento

El único requisito es que las fuerzas sean INTERNAS al sistema, así la cantidad de movimiento es constante en un sistema de dos partículas aislado sin que importe la naturaleza de las fuerzas internas. Un argumento similar se aplica también a un sistema aislado de muchas partículas.

Consideremos dos partículas de masa m_1 y m_2 que chocan



El choque (o interacción) puede ser de cualquier tipo: explosivo, elástico, semielástico o plástico

$$m_1 . v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 . v_{1f} + m_2 . v_{2f}$$

Expresión que nos dice que la cantidad de movimiento del sistema permanece constante cuando no actúan fuerzas exteriores o cuando su suma es cero.

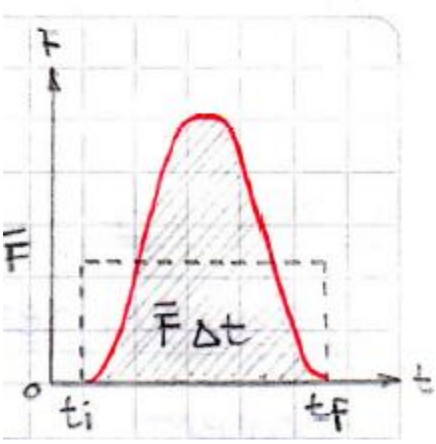
Impulso de una fuerza

El teorema del impulso y la cantidad de movimiento dice que: **el impulso de la fuerza neta es igual a la variación de la cantidad de movimiento.**
Con la última ecuación definimos que:

$$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F_{(t)}}\, dt = m\vec{V} - m\vec{V_0} = \Delta\vec{p}$$

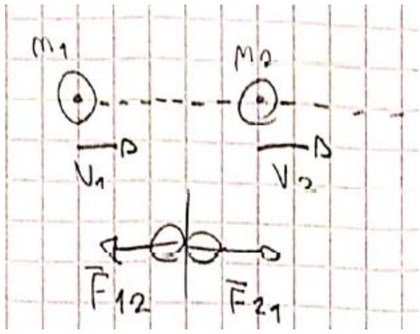
Se denomina impulso de una fuerza a la expresión

$$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F_{(t)}}\, dt = \vec{J} = \Delta\vec{p}$$



El impulso es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área debajo de la curva fuerza-tiempo. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento.
El impulso no es una propiedad de la partícula, sino una medida del grado al que una fuerza externa cambia el momento de una partícula. Por lo que cuando afirmamos que se le da impulso a una partícula, en realidad decimos que el **momento** se **transfiere** de un agente **externo** a la partícula.
En casos reales, Δtes muy chico.

Choque Elástico



*En un choque **elástico** la cantidad de movimiento antes y después del choque es la misma.*

- $\left|\overrightarrow{F_{12}}\right|$ y $\left|\overrightarrow{F_{12}}\right|$deben estar en la misma dir. del movimiento.
- m_1 y m_2 deben ser masas **aisladas**.
- **Sólo** hay fuerzas de interacción mutua entre m_1 y m_2

En un sistema aislado la cantidad de movimiento total se conserva

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_{12}}\ \overrightarrow{dt} = -\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_{21}}\ \overrightarrow{dt}$$

$$m_1\overrightarrow{v_{1(t2)}} - m_1\overrightarrow{v_{1(t1)}} = -\left(m_2\overrightarrow{v_{2(t2)}} - m_2\overrightarrow{v_{2(t1)}}\right)$$

$$m_1\overrightarrow{v_{1(t1)}} + m_2\overrightarrow{v_{2(t1)}} = m_1\overrightarrow{v_{1(t2)}} + m_2\overrightarrow{v_{2(t2)}}$$

$$cant.mov\ inicial = cant.mov\ final$$

Características

1. Se conserva la cantidad de movimiento total del sistema.
2. Se conserva la energía cinética del sistema.
3. El **coeficiente de restitución** es igual a **1**
4. Las fuerzas elásticas conservan la energía del sistema
5. Las velocidades después del choque están en la misma dirección.

También podemos definir otra ecuación **útil cuando no conocemos las masas de los objetos** y esta es:

$$\overrightarrow{v_{1(t1)}} + \overrightarrow{v_{2(t1)}} = \overrightarrow{v_{1(t2)}} + \overrightarrow{v_{2(t2)}}$$
$$vel.relativa\ antes = vel.relativa\ después$$

Choque inelástico

En el choque inelástico la cantidad de movimiento no se mantiene igual antes y después del choque sino que varía en función de algo que denominamos **Coeficiente de restitución.**

A diferencia del choque elástico, si bien los cuerpos "rebotan", hay una pequeña deformación, por lo tanto ***no se conserva la energía cinética*** *(parte se transforma en calor)*

$$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_f} \quad y \quad Ec_0 \neq Ec_f$$

$$e = \frac{v_{1(t2)} - v_{2(t2)}}{v_{1(t1)} - v_{2(t1)}}$$

Este **Coeficiente de restitución** es un valor que depende de las características de **rigidez** de los cuerpos.

Choque plástico o totalmente inelástico

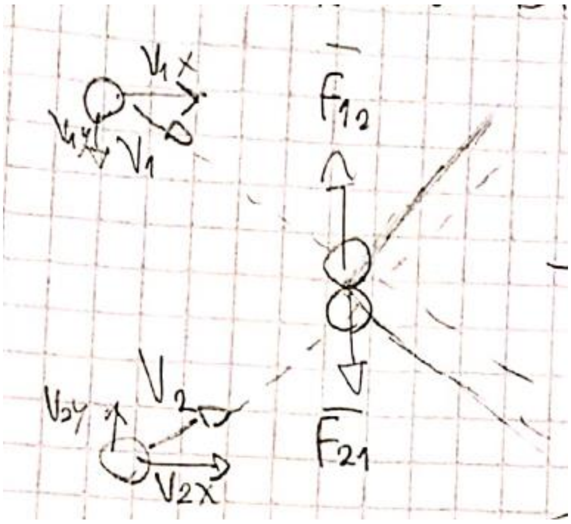
En el choque plástico el **Coeficiente de restitución** es igual a 0, por lo que los cuerpos después del choque se quedan pegados, y en el proceso se deforman.

$$v_{1(t2)} = v_{2(t2)}$$

$$e = 0 = \frac{v_{1(t2)} - v_{2(t2)}}{v_{1(t1)} - v_{2(t1)}}$$

$$v' = \frac{m_1\overrightarrow{v_{1(t1)}} + m_2\overrightarrow{v_{2(t1)}}}{m_1 + m_2}$$

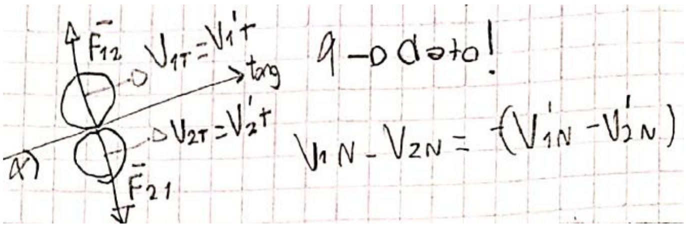
Choque en dos direcciones



Se debe plantear un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V'_{1x} + m_2 V'_{2x} \\ m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = m_1 V'_{1y} + m_2 V'_{2y} \end{cases}$$

Se debe conocer la dirección en la que chocan.



Ese ángulo alfa es de la recta que pasa tangente al punto de choque entre los dos cuerpos. La pendiente de esta debe ser un **DATO** para poder resolver el ejercicio.

Sistema de partículas

Centro de masa

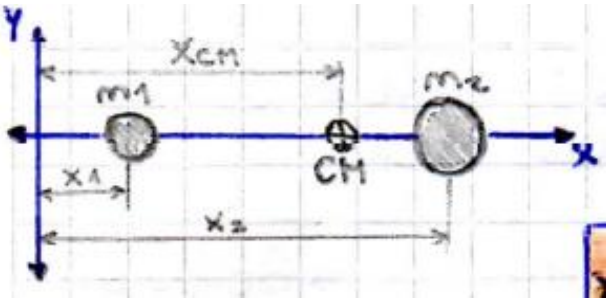
Un sistema siempre se mueve como si toda su masa estuviera concentrada en el **centro de masa**.

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1 \cdot \vec{r_1} + m_2 \cdot \vec{r_2} + m_3 \cdot \vec{r_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Con el eje X:

$$X_{CM} = \frac{m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + m_3 \cdot X_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



Movimiento de un sist. de partículas

Esencialmente, derivando la expresión anterior obtenemos la velocidad del centro de masa:

$$\overrightarrow{V_{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{V_i}$$

Si la derivamos de nuevo, obtenemos la aceleración.

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i$$

Ley fundamental para un sistema de muchas partículas

Si expandimos la última ecuación, obtenemos que:

$$\sum \vec{F}_{externas} = M\,\vec{a}_{cm} \qquad \text{o también} \quad \sum \vec{F}_{externas} = \frac{d(M\,\vec{v}_{cm})}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{1}{M} \cdot (m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + m_3 \cdot \vec{a}_3)$$

$$M \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = (m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + m_3 \cdot \vec{a}_3)$$

$$M \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

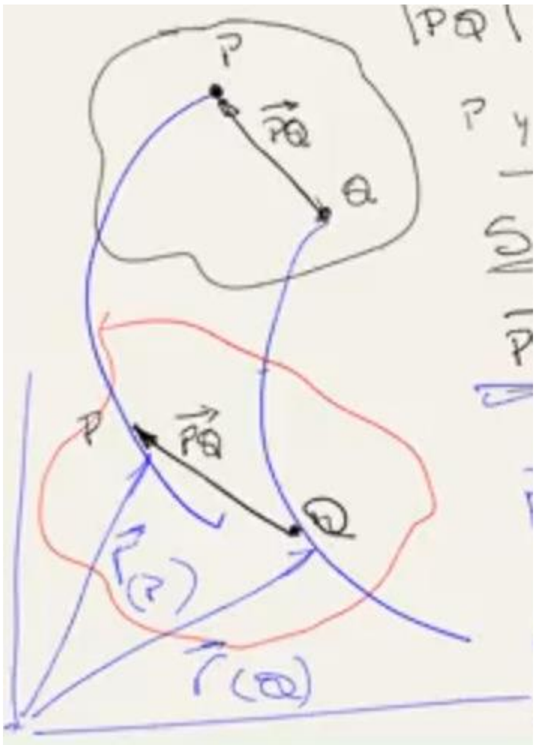
$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{exterior\ resultante}} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a_{CM}}}$$

PRIMERA ECUACIÓN UNIVERSAL

Esta relación indica que el centro de masa de un sistema de puntos materiales se mueve como si todas las masas del sistema estuviesen concentradas en el centro de masa y como si todas las fuerzas exteriores estuviesen aplicadas en ese punto.

Es decir, el centro de masa solo se va a mover con fuerzas **externas**, ya que la resultante de las fuerzas internas del sistema **SIEMPRE** será igual a 0.

Cinemática del Sólido



Un **Sólido** o **Rígido** es un **sistema de partículas.**

Definición de sólido

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = cte$$

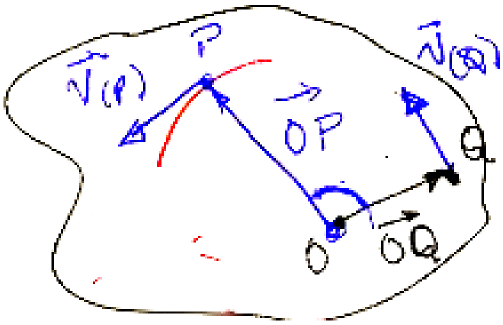
Un objeto rígido se define como uno que no es deformable, donde la separación entre todos los pares de partículas permanece constante.

Solo Traslación

Cuando hablamos de traslación hablamos de rígidos. Tenemos en cuenta que:

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = cte$ **Entonces:** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_{(p)}} - \overrightarrow{r_{(q)}}$

Solo Rotación



$V_{(O)} = 0\ (cte)$ **"o" Está fijo en el S.R.**

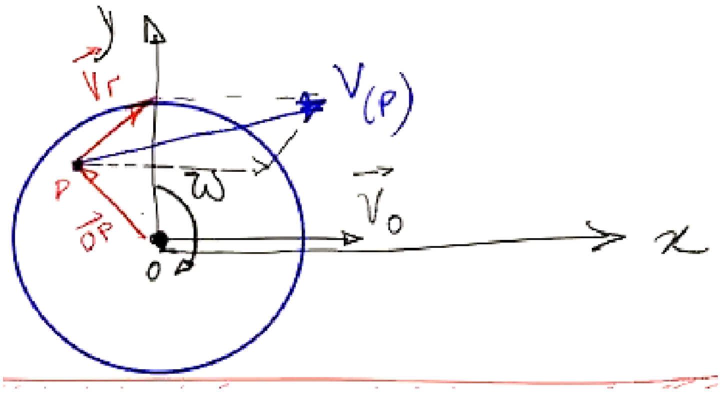
Cualquier punto "**P**" se mueve en una trayectoria circular de radio $\left|\overrightarrow{OP}\right|$

$$\left|\overrightarrow{V_{(P)}}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\omega$$

ω: **Rotación (velocidad de rotación)**

Es igual en todos los puntos del sólido.

Rotación + Traslación



Con respecto al **S.R.** (x,y)

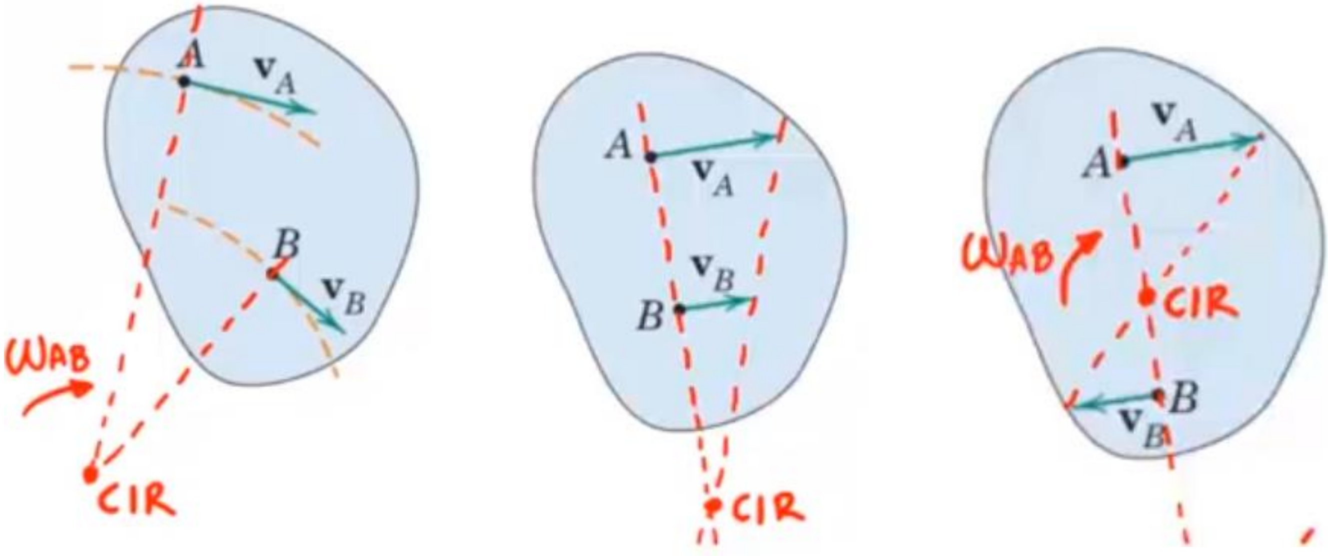
$$\left|\overrightarrow{V_r}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\omega$$

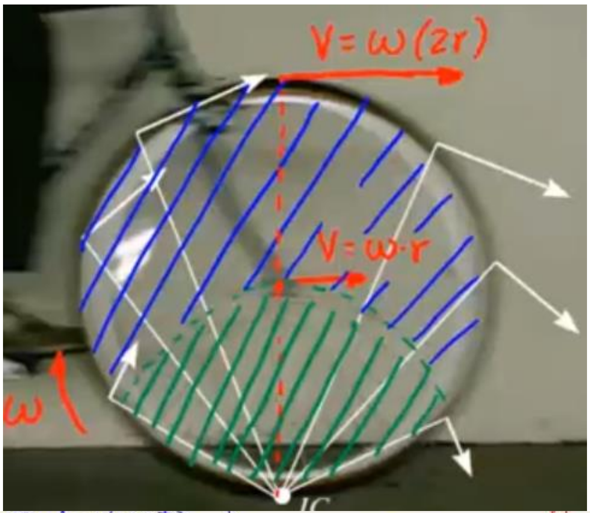
La velocidad absoluta del punto **P** es la siguiente:

$$\overrightarrow{V_{(P)}} = \overrightarrow{V_{(O)}} + \overrightarrow{V_r}$$

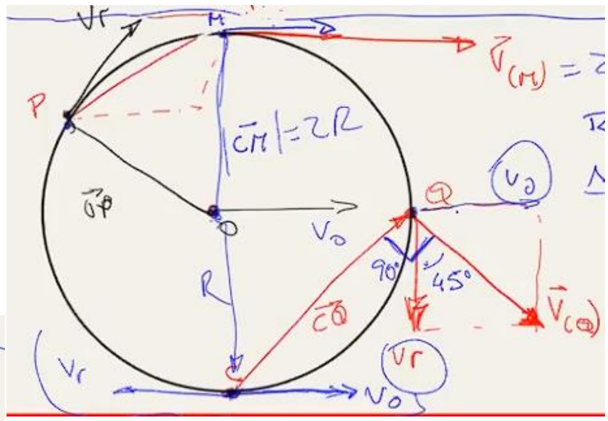
Que se obtiene sumando la **velocidad del eje de rotación** más **la velocidad de rotación pura si "O" estuviera fijo.**

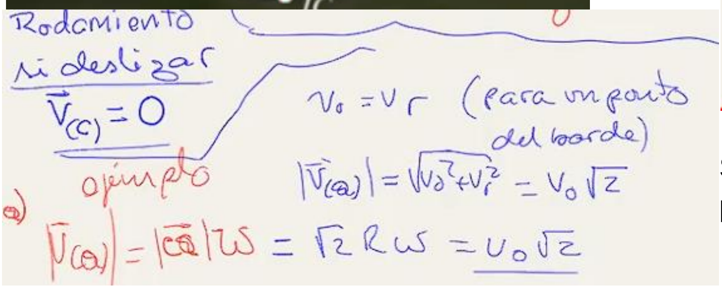
Centro instantáneo de rotación





El centro instantáneo de rotación es aquel que tenga velocidad 0. El caso más común es en un rodamiento sin deslizar, donde el punto de la rueda que está en contacto con el piso, este tiene velocidad 0 en un determinado instante.





Se puede calcular la velocidad de cualquier punto de la rueda usando la siguiente fórmula:

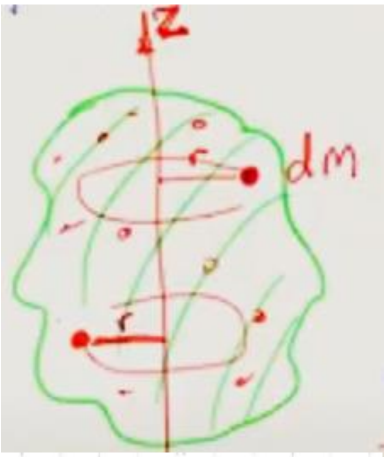
$$v_p = v_o\sqrt{2}$$

Y así independientemente de la forma de un objeto se calcula de manera similar la velocidad de un punto cualquiera cuando haya rotación o traslación + rotación:

$$\overrightarrow{v_P} = \left|\overrightarrow{CP}\right|\omega \quad \text{ó} \quad \overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_O} + \overrightarrow{v_r} \text{ siendo } \left|\overrightarrow{v_r}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\omega$$

Dinámica del Sólido

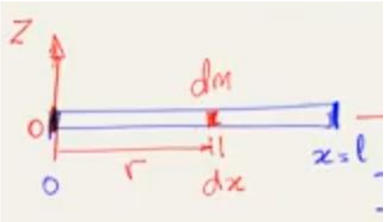
Momento de inercia



Consideramos un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo **z**. El caso de una partícula **dm** de masa **finita**, su momento de inercia es:

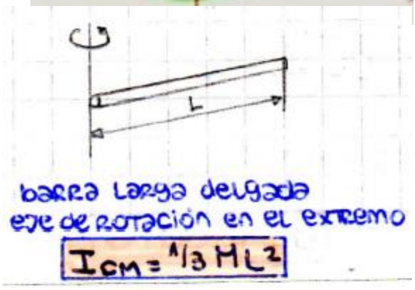
$dI_z = R^2 dm$ **y sumando todas partículas:** $I = \int_0^M R^2 dm$

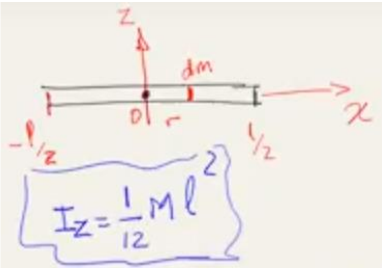
Ejemplo de cálculo para una barra:



Tomamos $dm = \frac{M}{l} dx$

Desarrollando la integral llegamos a: *(imagen derecha)*



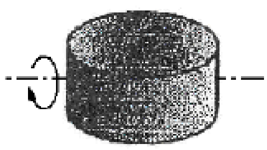


Con la misma ecuación podemos desarrollar si el centro de rotación estuviera centrado. (imagen izquierda)

Y así podemos desarrollar varios casos más:

Cilindro hueco y delgado

$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$



Cilindro macizo

$I_{CM} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

Cilindro hueco y grueso

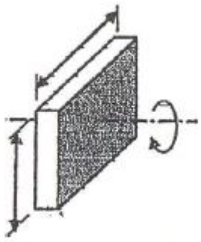
$I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$

Esfera maciza

$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

Esfera hueca y delgada

$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$



Placa rectangular

$I_{CM} = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2)$

Energía Cinética de la Rotación

Consideramos un objeto que gira alrededor de un eje fijo **z**. La energía cinética del rígido será la suma de la energía cinética de cada una de sus partículas, la cual es:

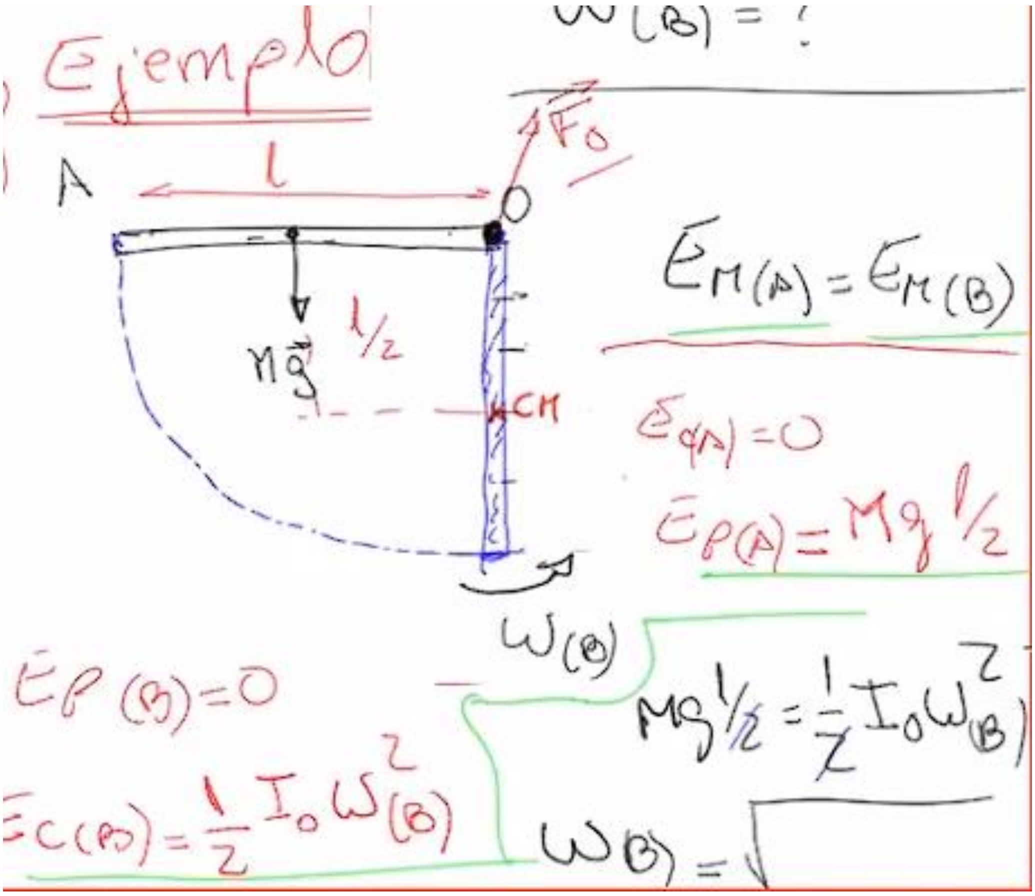
$$Ei = \frac{1}{2} m_i\, v_i^2$$

Como todas las partículas tienen la misma velocidad angular **w**, las velocidades lineales dependen de la distancia **Ri** al centro de rotación.
Así definimos la energía total del objeto rígido en rotación:

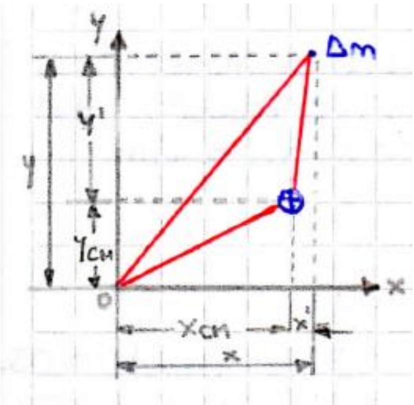
$$Er = \sum Ei = \sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i\, R_i^2\, \omega^2$$

$$Er = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\sum m_i\, R_i^2\right) = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^M R^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$Er = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$



Teorema de Steiner o de los Ejes Paralelos



Supongase que el momento de inercia alrededor de cualquier eje a través del centro de masa es **Icm** El teorema de ejes paralelos establece que el momento de inercia alrededor de cualquier eje que es paralelo y se encuentra a una distancia **D** del eje que pasa por el centro de masa es:

$$I_z = I_{cm} + M\,D^2$$

Demostración

Un objeto gira en el plano **xy** alrededor del eje **Z** las coordenadas del centro de masa son **Xcm, Ycm**.

$$\boxed{I = \int R^2\,dm = \int (x^2+y^2)\,dm}$$

Relacionamos las coordenadas **x,y** del elemento de masa **dm** a las coordenadas del elemento de masa relativas al centro de masa **x',y'** Establecemos **x** e **y** en base a:

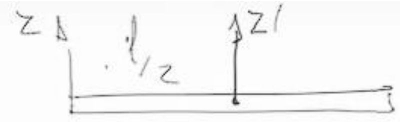
$$\boxed{x = x' + x_{cm}} \quad e \quad \boxed{y = y' + y_{cm}}$$

$$\boxed{I = \int \left[(x'+x_{cm})^2 + (y'+y_{cm})^2\right] dm}$$

$$\boxed{I = \int \left[(x')^2 + (y')^2\right] dm + 2x_{cm}\int x'\,dm + 2y_{cm}\int y'\,dm + (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)\int dm}$$

- El primer término es por definición el momento de inercia alrededor de un eje que es paralelo al eje z, y que pasa por el centro de masa.
- Los dos segundos términos de ese mismo lado son cero porque por definición del centro de masa $\int x'\,dm = \int y'\,dm = 0.$
- El último término del lado derecho es **M.D^2** por qué $(x_{cm}^2 + y_{cm}^2 = D^2)$ y $(\int dm = M)$

$$I_z = I_{cm} + M\,D^2$$



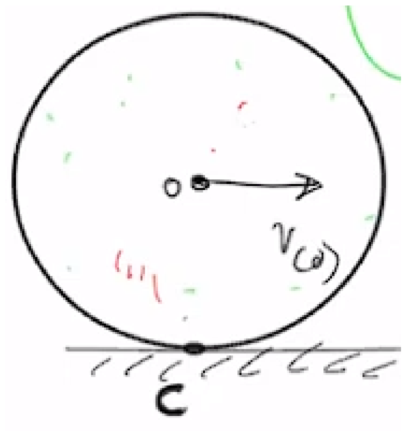
$\frac{1}{3}Ml^2$

$$I_{z'} = \frac{1}{12}Ml^2$$

$$I_{z'} = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = Ml^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{I_{z'} = \frac{1}{3}Ml^2}$$

Energía Cinética de Traslación + Rotación



$$Ec = \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

Usando el Teorema de Steiner podemos calcular:

$$I_c = I_o + M\,R^2$$

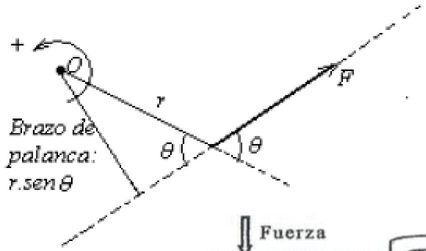
$$Ec = \frac{1}{2}(I_o + M\,R^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2}(R\omega)^2$$

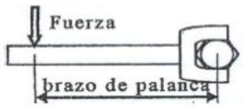
Llegando a la fórmula general, aplicable a todos los objetos:

$$Ec = \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2} M\,v_o^2$$

Recordar que esta fórmula siempre tiene que estar referida al centro de masa.

Momento de una fuerza / Momento de Torsión



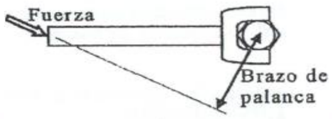


El momento de una fuerza lo definimos como:

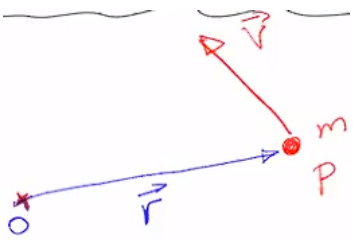
$$\overrightarrow{\tau_o} = \vec{r} \times \vec{F}$$

También se puede expresar como:

$$\overrightarrow{\tau_o} = r.F.sen\,\theta$$



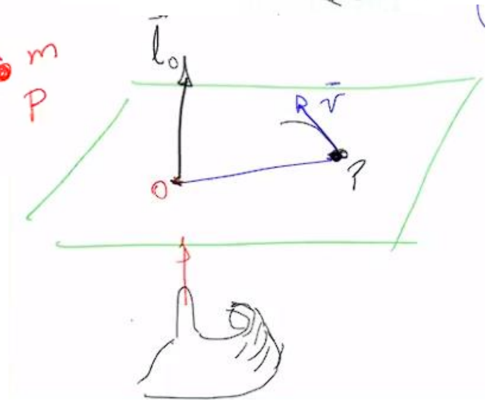
Cantidad de movimiento angular



$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

El momento cinético es:

$$\overrightarrow{l_o} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Teorema del momento cinético

Derivando la expresión del momento cinético tenemos:

$$\frac{d\overrightarrow{l_o}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Donde se anula el primer término debido a que es el producto cruz del mismo vector (= 0)

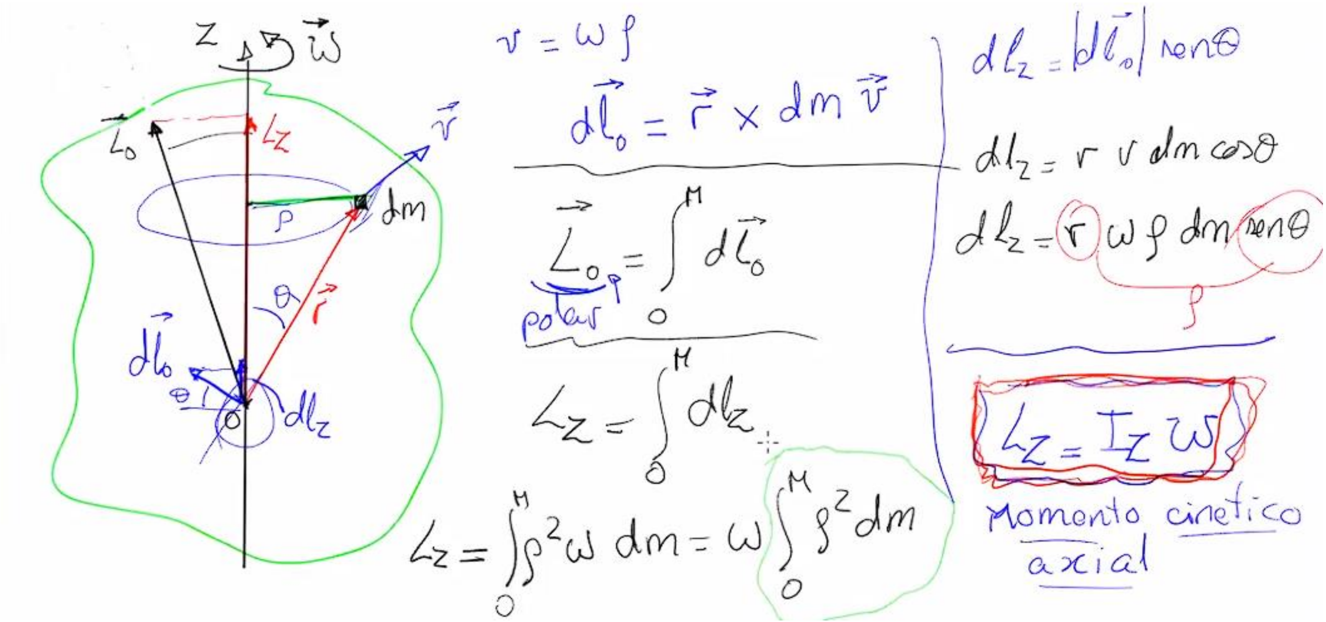
$$\frac{d\overrightarrow{l_o}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

Donde $m\vec{a}$ es la resultante de las fuerzas:

$$\frac{d\overrightarrow{l_o}}{dt} = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{R}} = \overrightarrow{\tau_o}$$

*Este teorema es válido siempre y cuando el punto **o** sea un punto fijo.*

Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio



Si el objeto es simétrico con respecto al eje de rotación (el centro de masa también está en el medio), podemos decir que:

$$\overrightarrow{L_z} = I_z\, \vec{\omega}$$

Teorema del Momento cinético de un sistema de partículas

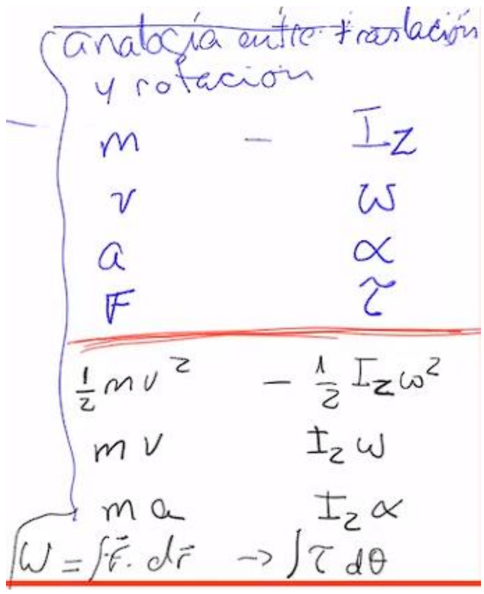
$$\frac{d\overrightarrow{l_o}}{dt} = \overrightarrow{\tau_o}$$

Al sumar los dos miembros del teorema para todas las partículas del sistema:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{\tau_{o\,ext}}$$

*Este teorema es válido solo para un punto **o** fijo, o de forma instantánea en el centro instantáneo de rotación “**c**” (CIR), o, con el polo en el **cm** (centro de masa).*

La cant. de mov. angular solo varía con Fext.



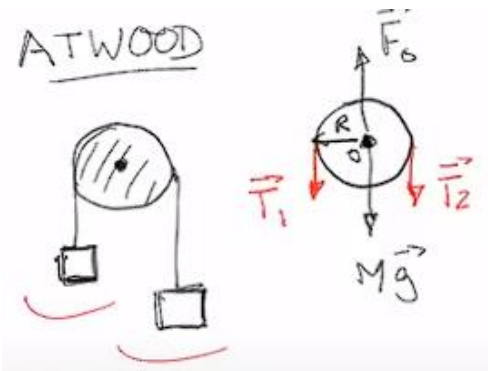
Rotación con eje fijo y momento de inercia constante

$$L_z = I_z \omega \qquad \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z\, \alpha \quad \text{(aceleración angular)}$$

Reemplazando la expresión en el teorema de momento cinético tenemos la **2da ley para las rotaciones:**

$$I_z\, \alpha = \tau_z$$

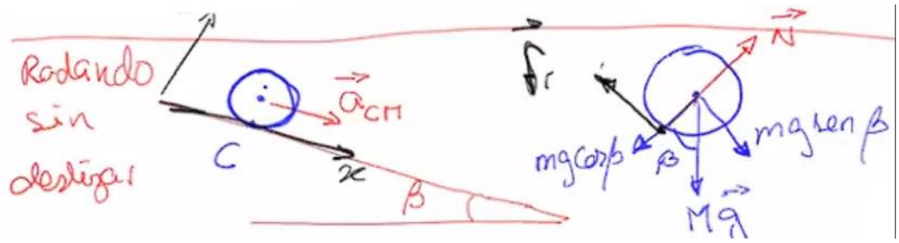
Ejemplo máquina de atwood



$$F_o - M\,g\; - T_1 - T_2 = 0$$
$$\tau_z = I_z\,\alpha = r\,T_1 - r\,T_2$$

Siendo r el radio de la polea.

Ejemplo rueda rodando sin deslizar



$$N - mg\;cos\;\beta = 0$$
$$mg\;sen\;\beta - f_r = M\;a_{cm}$$

Tomando polo en el centro de masa:

$$R\;f_r = I_z\,\alpha$$

Otra opción, más preferible es tomando polo en el **CIR**

*Como sabemos que el punto **c** está estático, deducimos que la fuerza de fricción será igual a la fuerza ejercida por el peso ajustada por la inclinación, entonces queda:*

$$R\;[m\;g\;sen\;\beta] = I_z\,\alpha$$

*Y se aplica **STEINER** a esta última ecuación.*

$$I_z\;=\;I_{cm} + M\;D^2\;=\;I_{cm} + M\;R^2$$
$$R\;[m\;g\;sen\;\beta] = \alpha.\,[I_{cm} + M\;R^2]$$

Despejando la aceleración angular

$$\alpha = \frac{R\;m\;g\;sen\;\beta}{I_{cm} + M\;R^2}$$

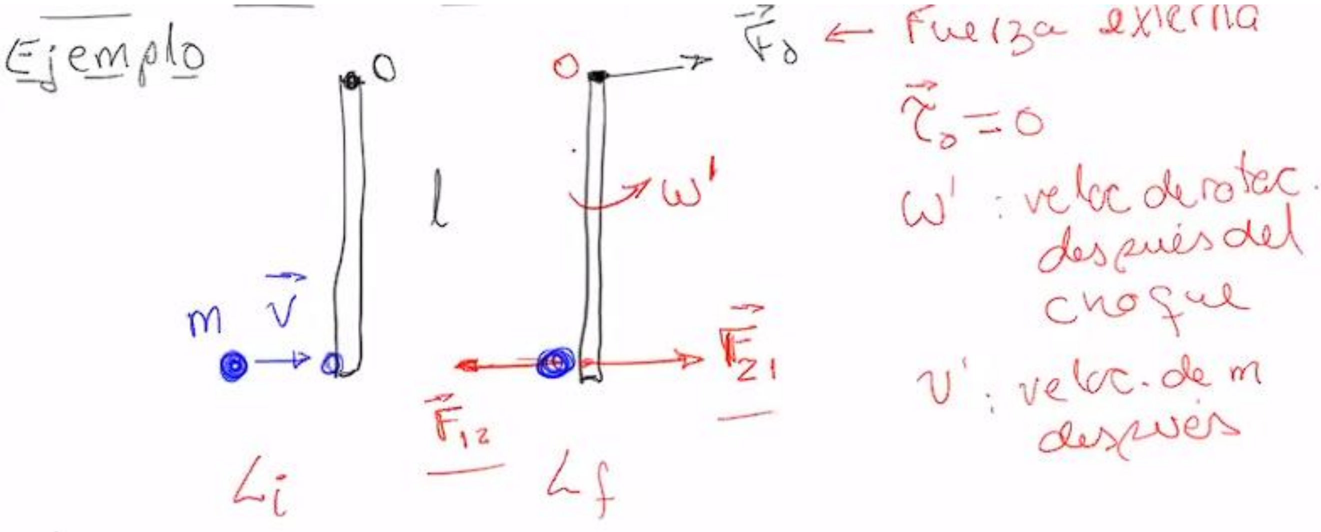
Con esto podremos saber la aceleración angular que tendrá esa rueda.

Teorema de conservación del momento cinético

Si tenemos un punto "**O**" tal que los momentos resultantes en "**O**" son cero:

$$\overrightarrow{\tau_o} = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{L_o} = cte$$

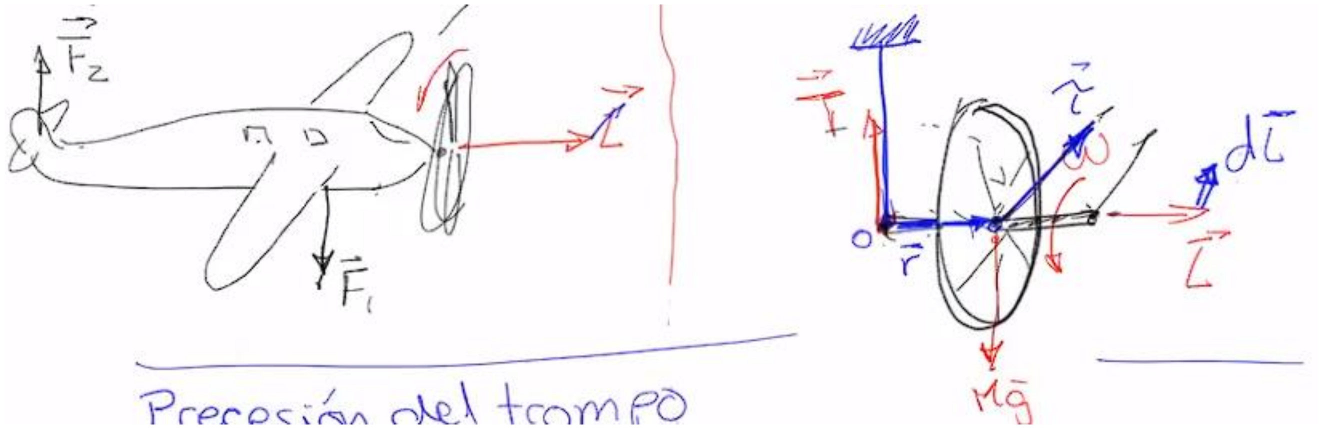
Ejemplo:



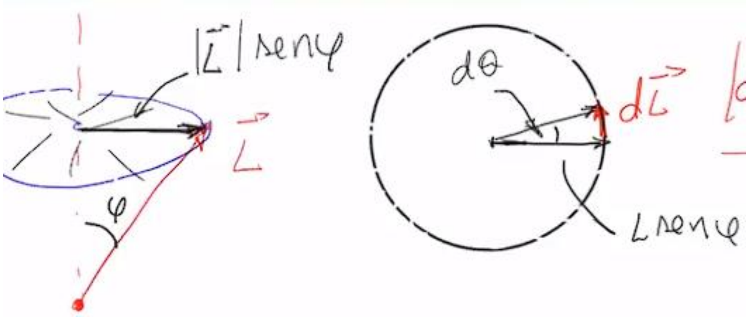
$$L_i = l\, m\, v \qquad = \qquad L_f = l\, m\, v' + I_o\, \omega'$$

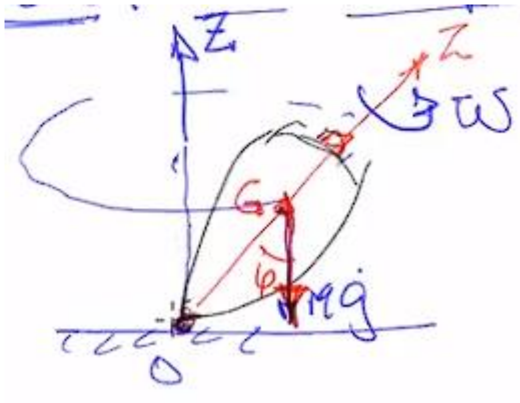
Efecto Giroscópico

Mediante fuerzas perpendiculares logró que un objeto en rotación se mueva en determinada dirección.



Ejemplo del trompo





El momento de torsión diferente de cero produce un cambio en el momento angular **dL** que está en la misma dirección que **R**. Por lo que al igual que el vector τ, dL también debe formar ángulos con **L**.
Con $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$ describimos a la **velocidad de precesión** y es la velocidad a la que cambia **L** (momento cinético)

$$d\theta = \frac{dL}{L} = \frac{(Mg|\overrightarrow{OG}|)dt}{L} \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{Mg|\overrightarrow{OG}|}{I\omega}$$

Esto solo es válido cuando $\Omega < \omega$es decir, cuando el momento de rotación es grande en comparación con Mgh

Movimiento Oscilatorio

Un movimiento oscilatorio o vibratorio es aquel movimiento **periódico** donde el **Período** $T = cte$, en el cual la partícula se mueve alternativamente en un sentido y en el opuesto.

Definiciones

- **Período (T)**: Es el tiempo que demora una partícula (que vibra con un M.A.S., o con cualquier movimiento periódico) en describir un ciclo completo. Se mide en segundos
- **Frecuencia (f)**: es el número de ciclos que describe la partícula en la unidad de tiempo. $f = \frac{1}{T}$ Se mide en Hertz (Hz)
- **Frecuencia Angular (ω)**:$\omega = 2\pi f \;\; [rad/s]$
- **Amplitud (A):** Máximo desplazamiento de la partícula en cada dirección.
- **Elongación (x)**: Desplazamiento de la partícula.
- Las fuerzas que actúan sobre un movimiento oscilatorio son **conservativas.**

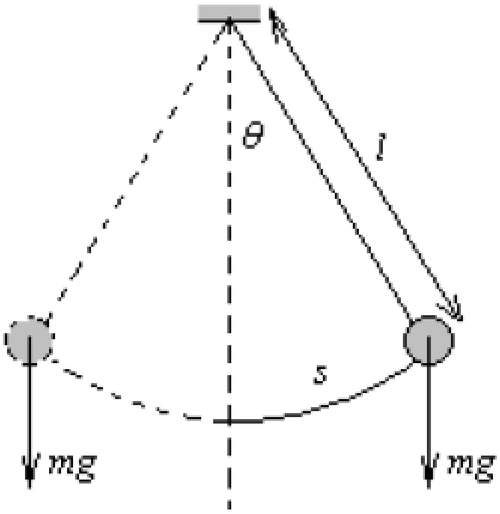
Mov. Armónico Simple

Es simple porque tenemos una oscilación con una sola frecuencia. *En todo movimiento armónico el período es independiente de la amplitud.*

Ecuaciones

Posición $A.cos(\omega.t+\varphi)$	**Velocidad** $-\omega.A.sen(\omega.t+\varphi)$	**Aceleración** $-\omega^2.A.cos(\omega.t+\varphi)$	**Ecuación del M.A.S.:** $a_{(t)}=-\omega^2.x_{(t)}$ $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$
Fase $\omega.t+\varphi$	**Ángulo de Fase** φ	**Elongación** $x_{max}=A$	

Péndulo Simple



masa puntual sostenida por un alambre de longitud l de masa despreciable. Para pequeños desplazamientos angulares realiza un movimiento armónico simple.
El movimiento se realiza entre $\pm\theta_{max}$
La fuerza restauradora será la fuerza tangencial:

$$F_{res}=mgsen\theta=-mg\frac{s}{l}$$

$$F_T-mgcos\theta=ma_c \qquad mgsen\theta=ma_t$$

$$gsen\theta=a_t=-\alpha.l \qquad a(t)=-\omega^2.x(t)$$

Como la Ecuación del **M.A.S.** nos queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}sen\theta$$ *-> NO ES UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE ASI NOMAS*

Hacemos una APROXIMACIÓN para $\theta<0.1\,rad$:

$$sen\theta\simeq\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

Período: $T=2\pi\sqrt{l/g}$

Frec. Angular: $\omega=\sqrt{g/l} \quad \rightarrow \quad Esto\ no\ es\ velocidad\ angular.$

Péndulo Físico

El péndulo en realidad, es un rígido, y lo podemos tratar como tal:

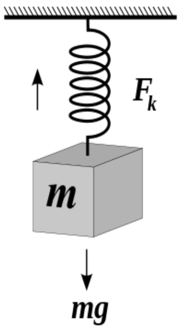
$$I_o\,\alpha=\tau_o=-Mg\left|\overrightarrow{OG}\right|sen\,\theta$$

Como antes, tendremos que hacer la misma aprox para la **ED.** del **M.Á.S.**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+-\frac{Mg\left|\overrightarrow{OG}\right|}{I_o}\theta=0 \qquad -> \qquad \omega=\sqrt{\frac{Mg\left|\overrightarrow{OG}\right|}{I_o}}$$

Período: $T=2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mg\left|\overrightarrow{OG}\right|}}$

Sistema Masa-Resorte



Un sistema masa-resorte sin amortiguamiento o fricción se comporta como un oscilador armónico simple.
Ley del resorte:
El resorte tiene su fuerza restauradora: $F_{res} = -k.x$ donde **k** es la constante elástica de un resorte, se mide en **N/m**. El signo menos indica que la fuerza restauradora siempre tiene sentido opuesto al de la deformación que provoca el sistema.
Para el sistema de la imagen, podemos definir la extensión del resorte para cuando el sistema esté en equilibrio (La resultante de las fuerzas sea 0): $k.d = m.g$

Planteando la segunda ley de newton, llegamos a la ecuación del **M.A.S**: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

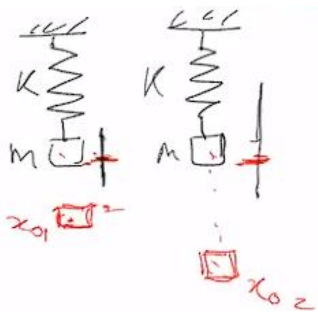
Período: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ **Energía potencial elástica:** $Epe = \frac{k\,x^2}{2}$

Por conservación de la **Energía**: $\frac{m\,v_{max}^2}{2} = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,A^2}{2}$

La Velocidad del sistema queda: $v = \sqrt{(A^2 - x^2)\frac{k}{m}}$ $a(x) = -\frac{k}{m}x$

Y, por último, usando ecuaciones diferenciales salen las ecuaciones:

$A = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2}}$ y $tg\ \varphi = \frac{v_o}{\omega.x_o}$



Ejemplo de pregunta de parcial: con un mismo resorte, si suelto las masas en las posiciones indicadas en rojo:

1. ¿Cuál de las dos llegaría primero a la posición de equilibrio?
   *Rta: Tardarían lo mismo, porque el **Período** no depende de la amplitud.*

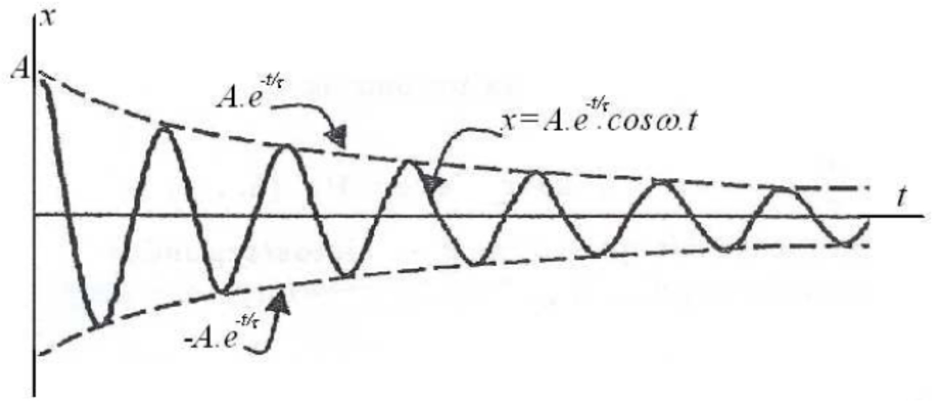
2. ¿Cuánto tiempo tardarían en llegar?
   *Rta: Tardarían ambas en llegar ¼ **T**.*

Mov. oscilatorio amortiguado

Es un sistema masa-resorte en el que actúa una fuerza de amortiguación igual a $F_{Amort.} = -b.v$, donde b es la constante de amortiguación y v la velocidad de la masa m

La función que describe la posición de una partícula con este movimiento es:

$$x(t) = A\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t \quad donde\ \tau = \frac{2m}{b} \quad y\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$$



Mov. oscilatorio forzado

Supongamos un oscilador con amortiguación sobre el que actúa una fuerza impulsora dada por la ecuación: $F_{(t)} = F_0 \cos \omega t$, donde ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora y F_0 es una constante.

En un estado estacionario en donde las oscilaciones se realizan con amplitud constante, la ***solución estacionaria*** es:

$$x(t) = A.\cos(\omega t + \phi)\ ,$$

que es un MAS donde

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{b.\omega}{m})^2}}$$

ω_0 es la ***frecuencia natural*** del oscilador (sin fuerza impu1sora ni amortiguación)

Para el sistema masa-resorte la frecuencia natural es $\omega_0 = \sqrt{-\frac{k}{m}}$

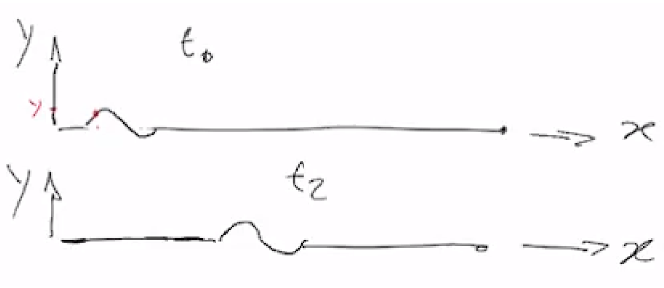
El valor de la amplitud será mayor cuando la frecuencia de la fuerza excitadora ω se aproxime más a la frecuencia natural de oscilación ω_0. El aumento de la amplitud es tan importante que cuando ω es aproximadamente igual a ω_0, se obtiene la máxima amplitud y el fenómeno se conoce con el nombre de ***resonancia.***

Ondas Elásticas o Mecánicas

La función de una perturbación de forma cualquiera avanzando en el sentido +x es:

$$y(x,t) = f(x - v.t)$$

v es una velocidad de propagación de la onda, es constante y depende del medio.



Pueden ser, según como se propagan:
- **Onda Plana** (en una dirección)
- **Onda Cilíndrica** (en dos direcciones)
- **Onda Esférica** (en tres direcciones)

Definiciones

La **longitud de onda** (λ) es la distancia entre dos crestas sucesivas. Se mide en metros en el sistema internacional, o en unidades más pequeñas.
El **período** (T) es el tiempo que tarda la onda en desplazarse una longitud de onda. Se mide en segundos
La **frecuencia** (f) es el número de longitudes de onda que se desplaza la onda en un período de tiempo. La frecuencia es igual a la inversa del período $f = \frac{1}{T}$ y se mide en Hz (hertz) o 1/s que representa ciclos/segundos.

La **frecuencia angular** o **pulsación angular** $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ se mide en rad/s.

La **amplitud** $A = y_{máx}$ se mide en metros

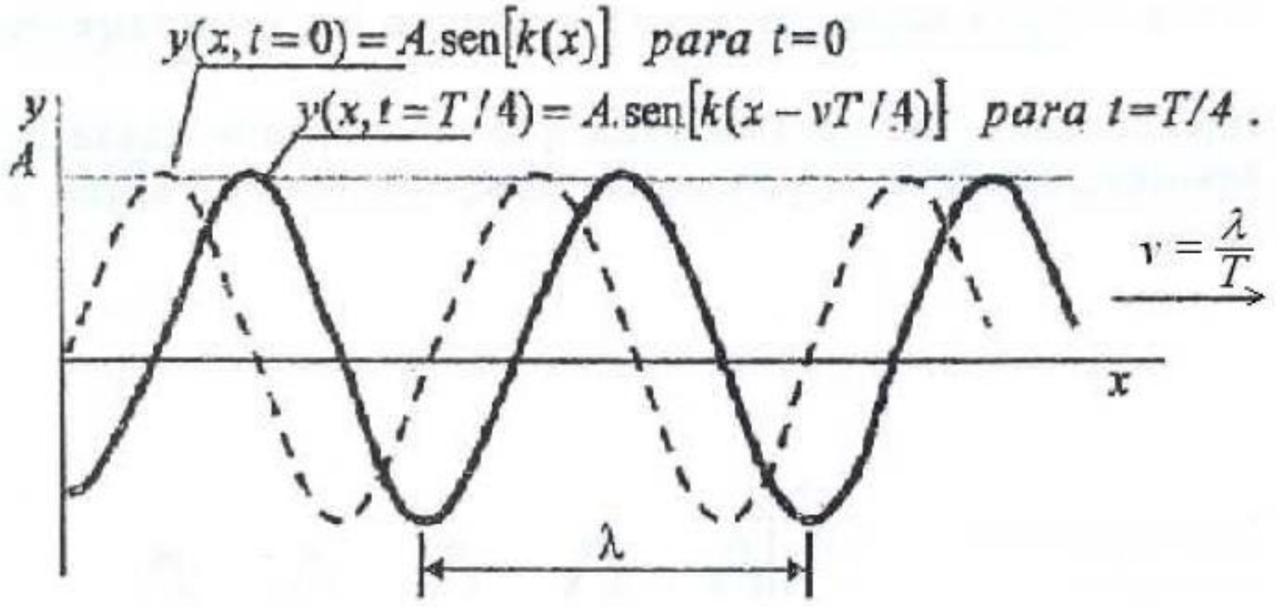
La **constante de onda** $k = \frac{2\pi}{\omega}$ se mide en rad/m

La **constante de fase** φ se mide en radianes.

La **onda sinusoidal** (para φ distinta de cero) es $y = A.sen(kx - \omega.t + \varphi)$

La fase de una onda es: $k.x - \omega.t + \varphi$ o $(k.x - \omega.t)$ cuando $\varphi = 0$

Representación de *y(x,t) para t = 0 s y para t = (T/4) s*



La función de la onda seria: $y = A.sen[k(x - v.t)]$

Esta constante K (**número de onda**) será la que definirá la longitud de onda:

$$k.\lambda = 2\pi \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La función de la onda quedaría finalmente: $y = A\ sen[\frac{2\pi}{\lambda}(x - v.t)]$

Otra fórmula importante:

$$k.v.t = 2\pi \qquad \rightarrow \qquad v.t = \lambda \qquad \rightarrow \qquad f = \frac{v}{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{v}{f}$$

Lo que **caracteriza** a una onda es: **o su frecuencia o su longitud de onda.**

Si consideramos un punto cualquiera de la onda que se desplaza con la velocidad de propagación *v* se observa que el valor *"y"* se conserva, entonces *x-vt* = constante; en estas condiciones si *t* aumenta, *x* debe aumentar también, esto nos está indicando que esta onda se desplaza hacia la derecha.

Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de una onda es igual a *v =λ/T,* la función de onda también se puede escribir de las siguientes formas

$$y = A.sen[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})] \qquad y = A.sen[2\pi(\frac{x}{\lambda} - f.t)]$$

$$y = A.sen[k(x - v.t)] \qquad y = A.sen(kx - \omega.t)$$

Ondas en una cuerda tensa

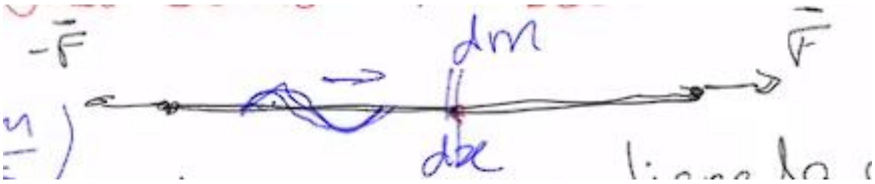
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}:$$ Velocidad de propagación

F: Fuerza que mantiene la cuerda tensa.

$$\mu = \frac{m}{l} \quad [kg/m]:$$ Densidad Lineal

Potencia de una onda en una cuerda

Cuando en una cuerda aparece una onda, es una energía que se mueve a través de la cuerda.



$$dE_m = \frac{1}{2} dm.v_y^2 \qquad \leftrightarrow \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -A.\omega.cos(k.x - \omega.t)$$

Donde: $-A.\omega = v_{max}$ Entonces, queda:

$$dE_m = \frac{1}{2} dm.A^2.\omega^2$$

Ahora reemplazando con la densidad lineal:

$$\mu = \frac{m}{l} \ ; \ \mu = \frac{dm}{dx} \quad \rightarrow \quad dm = \mu.dx$$

$$dE_m = \frac{1}{2}.A^2.\omega^2.\mu.dx$$ $\rightarrow$ Esta es la energía mecánica de un punto en la cuerda

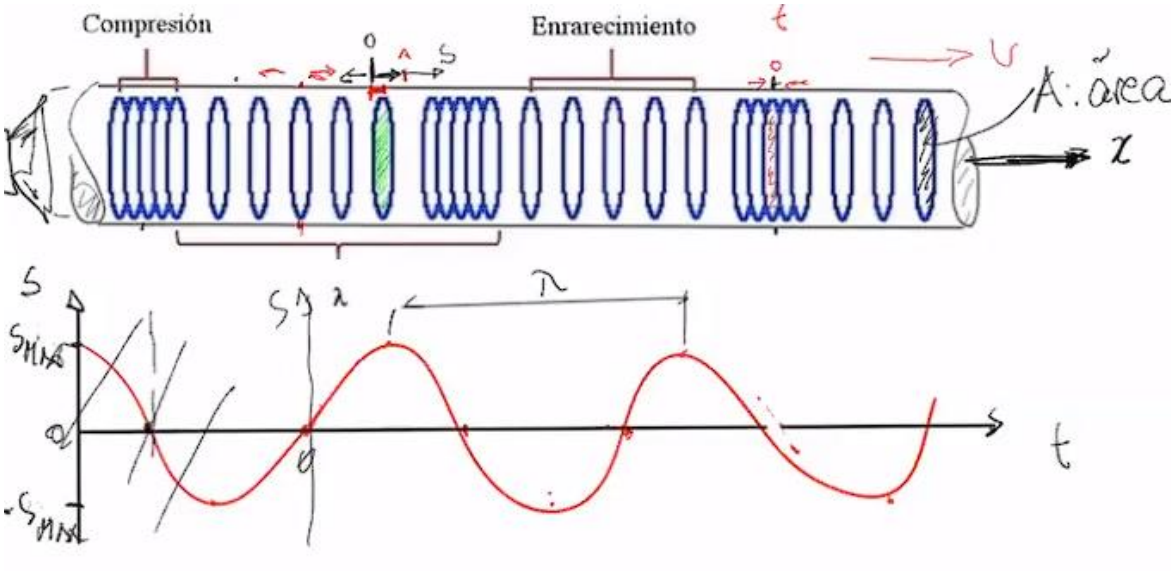
Potencia:

$$P = \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}.A^2.\omega^2.\mu.\frac{dx}{dt}$$ $\rightarrow$ Siendo esto la **velocidad de la onda**.

$$P = \frac{1}{2}.A^2.\omega^2.\mu.v = cte \qquad \rightarrow \ Potencia\ de\ una\ onda$$

La potencia de una onda es función de la **amplitud** y de la **frecuencia**.

Ondas sonoras (Ondas Longitudinales)



$$S(x,t) = S_{max} sen(kx - \omega . t)$$

A será el área del tubo

ΔP Será la variación de la presión del aire.

$$P = \frac{F}{A} \qquad [\frac{N}{m^2}]$$

Y podemos definir como "compresibilidad" a una deformación que presente el medio dentro del tubo, ya que va a actuar como un resorte.

$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V}$ Siendo B el módulo elástico de compresibilidad del medio.

Siendo ρ la densidad del material:

$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ **Velocidad de una onda de compresión en un medio**

Como la compresibilidad de un gas varía, aparecen los siguientes valores:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Siendo:

- γ Coeficiente Adiabático (Constante característica de un gas)
- $R = 8.3\ J/mol\ K$ Constante de los gases
- T Temperatura en Kelvin.
- M masa molar del gas (Constante característica de un gas)

$$M_{aire} = 29\ g/mol$$

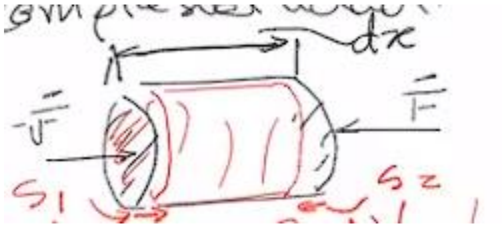
Por lo que la velocidad de una onda de compresión en un gas, varía en base a la temperatura.

$$v_{aire}\ @\ 20ºc = 343 m/s$$

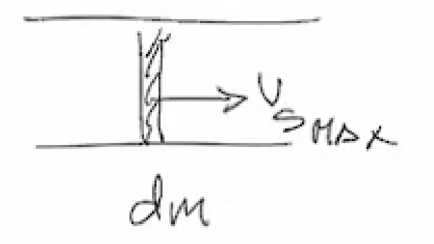
Volviendo a la compresibilidad del gas dentro del tubo…

$$\Delta P(x,t) = -B\frac{A.ds}{A.dx} = -B\frac{ds}{dx}$$

$$\Delta P(x,t) = -B.k.S_{max}.cos(kx - \omega.t)$$



Potencia de una onda sonora

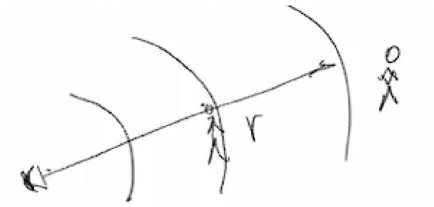


$$S = S_{max}.sen(kx - \omega.t)$$

$$v_{S_{max}} = S_{max}.\omega \qquad dm = \rho.A.dx$$

$$dE_m = \frac{1}{2}dm.v_{S\,max}^2 = \frac{1}{2}S_{max}^2.\omega^2.\rho.A.dx$$

$$P = \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}S_{max}^2.\omega^2.\rho.A.v$$



Intensidad de una onda sonora

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}S_{max}^2.\omega^2.\rho.v \quad [\frac{W}{m^2}]$$

Otra fórmula derivada de la primera:

$$I = \frac{\Delta P_{max}^2}{2.\rho.v} \quad [\frac{W}{m^2}]$$

Nivel de intensidad

*También conocido como **nivel sonoro**.*

Se toma una referencia I_o llamada **intensidad umbral.**

Para los seres humanos, se toma el valor:

$$I_o = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$$

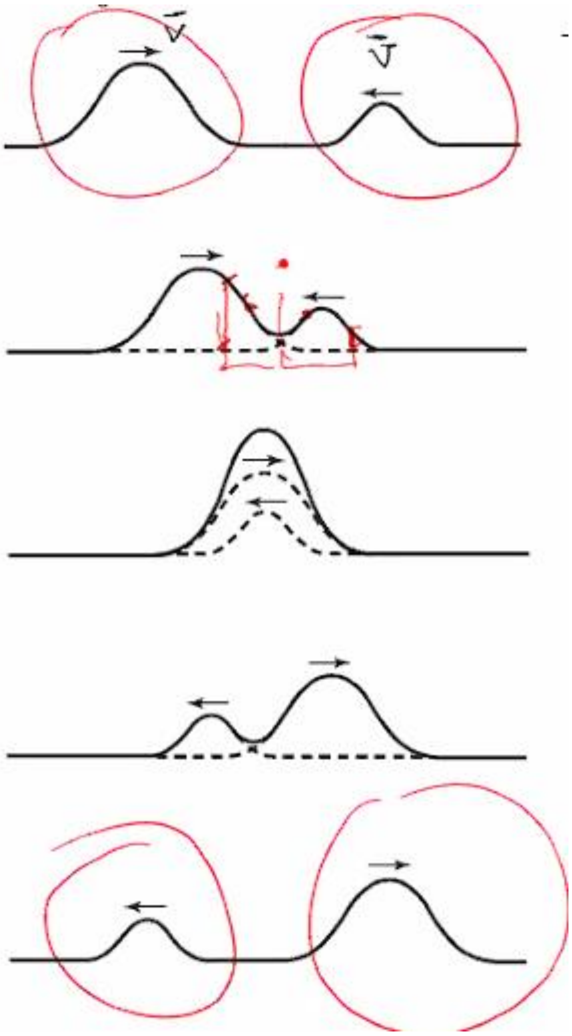
A partir de ese nivel se define una **escala logarítmica** medida en **decibelios**.

$$\beta = 10.Log_{10}\frac{I}{I_o} \quad [dB]$$

Nivel de intensidad del sonido.	
140 dB	Umbral del dolor
130 dB	Avión despegando
120 dB	Motor de avión en marcha
110 dB	Concierto
100 dB	Perforadora eléctrica
90 dB	Tráfico
80 dB	Tren
70 dB	Aspiradora
50/60 dB	Aglomeración de Gente
40 dB	Conversación
20 dB	Biblioteca
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de audición

Superposición de ondas

Cuando dos ondas llegan a un mismo punto se superponen

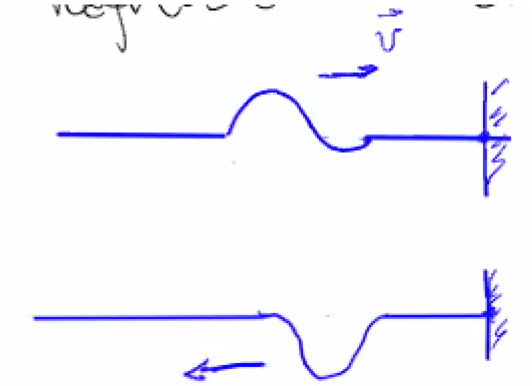


Ondas que viajan en sentido contrario

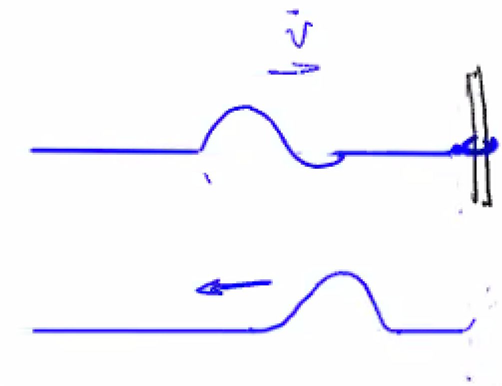
Pasan de largo.

Reflexión de ondas

Extremo Fijo

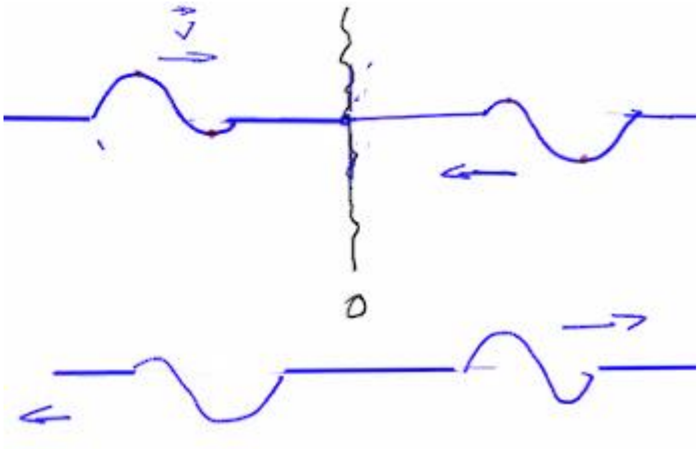


Cuando la onda llega al punto fijo, va a reflejarse, pero será invertida.



Extremo Libre

En este caso, el extremo se puede mover para arriba y para abajo. La onda se va a reflejar, de manera derecha.

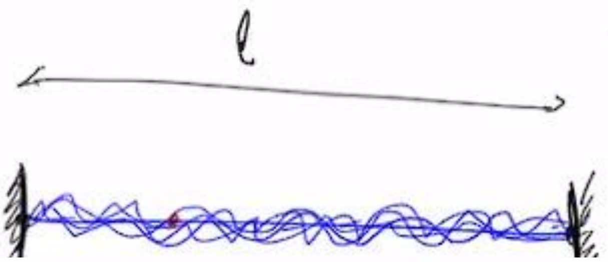


Otro caso: Dos ondas inversas, yendo en direcciones contrarias.
Cuando las dos ondas se superponen en el punto medio, este punto va a quedarse quieto. Las ondas van a pasar de largo.
En ese punto cuando se superponen las ondas tenemos:

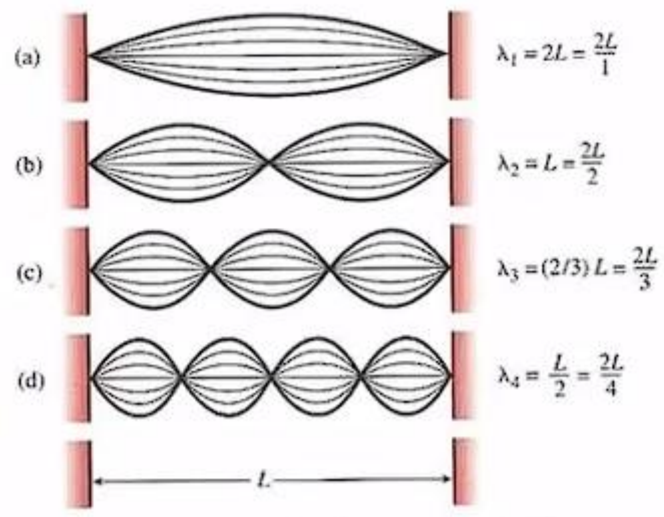
$$y = y_1 + y_2 = f(x - vt) + f(x + vt)$$

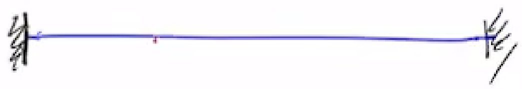
Ambos extremos fijos

El punto rojo de la cuerda no se va a mover debido a que hay muchas ondas yendo y viniendo, ya que las ondas están desfasadas de distintos ángulos.



2do:
Siendo el punto rojo un **generador de frecuencia**.
Para un determinado valor de frecuencia, podremos ver que la cuerda oscila completamente (a), alcanzando una amplitud máxima en su centro.
3ro
Si seguimos aumentando la frecuencia, veremos que la cuerda deja de vibrar ya que se empiezan a superponer las ondas y se cancelan entre sí.





Si seguimos aumentando la frecuencia, vuelve a vibrar, ahora como la imagen B.
Esto se da porque las ondas mantienen una fase que causa que los extremos están fijos.
Estas frecuencias las sacamos con:

$$f = \frac{n.v}{2.L}$$

A la primera iteración la llamamos **Frecuencia Fundamental:**

$$f_1 = \frac{v}{2.L} : Frecuencia\ Fundamental$$

A las demás iteraciones los llamamos **Armónicos**.

Función de una onda estacionaria

Se forma una onda estacionaria por la reflexión en los extremos.

La onda es la superposición de una onda: $y = y_1 + y_2$

Desarrollando...

$$y = 2.A.sen(k.x).cos(\omega.t): Función\ de\ una\ onda\ estacionaria$$

Esto es válido solamente en el caso que K sea igual a $\pi/L, 2\pi/L, 3\pi/2L$***....***

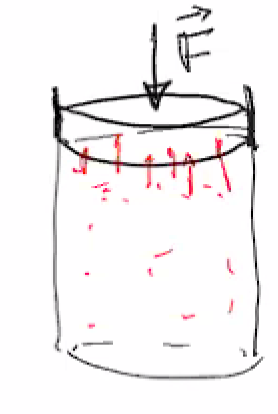
Estática de los fluidos

Densidad

La densidad puede ser uniforme o no uniforme.

$$\rho = \frac{m}{v}\ \ [kg/m^3]:\ Densidad\ media/Densidad\ Uniforme$$
$$\rho = \frac{dm}{dv}\ \ [kg/m^3]:\ Densidad\ no\ uniforme$$

Presión

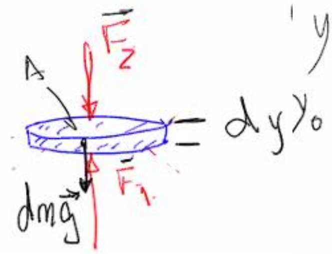


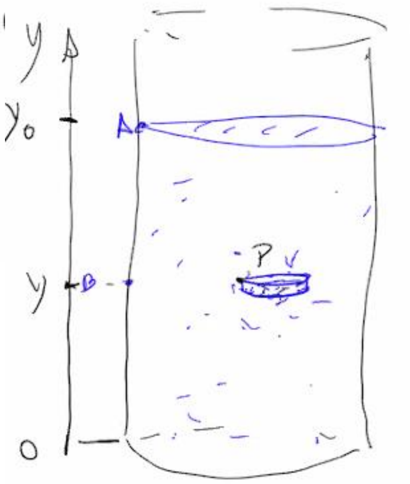
$$P = \frac{F}{A}\ \ [N/m^2]\ [Pa]:Presión\ Uniforme\ y\ sup.plana$$

Caso general:

$$d\underline{A}: Vector\ Normal\ a\ la\ Sup.$$
$$d\underline{F} = P.d\underline{A}$$

Presión en un Líquido





$$dv = A.dy \quad ; \quad dm = \rho.dv$$
$$F_1 = P_1.A\ \ ; F_2 = P_2.A$$
$$F_1 - F_2 - dm.g = 0$$
$$P_2 - P_1 = dP$$

Reemplazando en **(1)**:

$$P_2.A - P_1.A - \rho.A.dy.g = 0$$
$$(P_1 - P_2) - \rho.dy.g = 0$$
$$dP = -\rho.g.dy$$

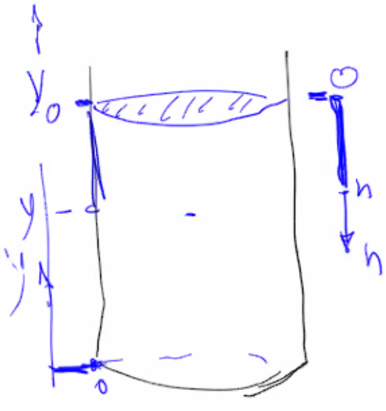
Para calcular la diferencia de presión entre **A** y **B**:

$$\int_A^B dP = -\int_A^B \rho.g.dy \quad \rightarrow \quad (P_B - P_A) = -\rho.g.\int_A^B dy$$

$$(P_B - P_A) = -\rho.g.(y_B - y_A)$$

Variación de presión en un líquido

Cuando analizamos la presión en un líquido debemos establecer una referencia:



$$h = y_o - y$$

$$P_{(y_o)} = P_o : Presión\ Atmosférica$$

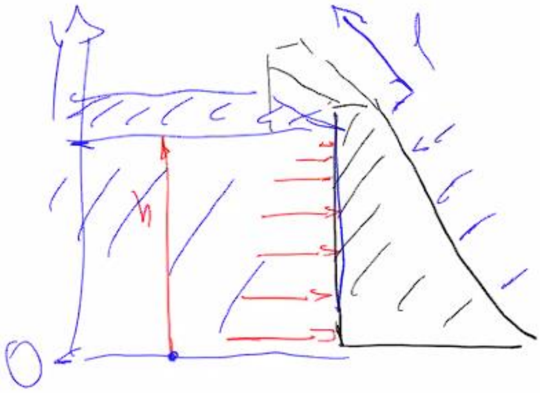
$$P_y - P_o = -\rho.g.h$$

$$P = P_{abs} - P_{atm}\ : Presión\ Manométrica\ (diferencia)$$

$$P = \rho.g.h$$

Cuando hablamos de **Presión Absoluta Cero**, decimos que hay **Vacío**, es decir, no hay partículas ni de líquido ni de gas.

Caso de una represa:



$$dF = P.dA = \rho.l.dy \qquad P = \rho.g.(h - y)$$

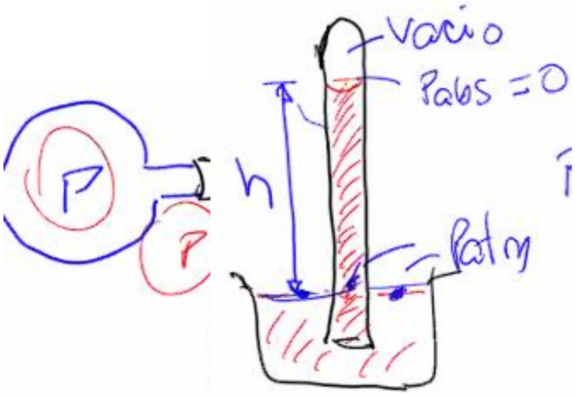
$$F = \rho.g.l.\int_0^h (h-y)dy = \rho.g.l.\frac{h^2}{2}$$

Manómetro

Utilizado para medir la presión de un **LÍQUIDO**

$$P = \rho.g.h$$

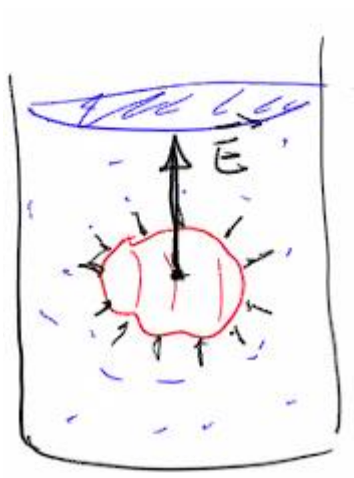
Barómetro



Utilizado para medir la presión de un **GAS**
Tomando un recipiente lleno de mercurio, y un tubo que llenamos de mercurio, al darlo vuelta y ponerlo en el recipiente, se forma un espacio de vacío en la parte superior, donde la P_{abs} es 0.
Usamos el vacío generado para establecer una referencia, entonces la P_{atm} será:

$$P_{atm} = \rho_{hg}.g.h$$

Principio de Arquímedes



$\vec{E}_r$: Empuje del líquido sobre un cuerpo sumergido

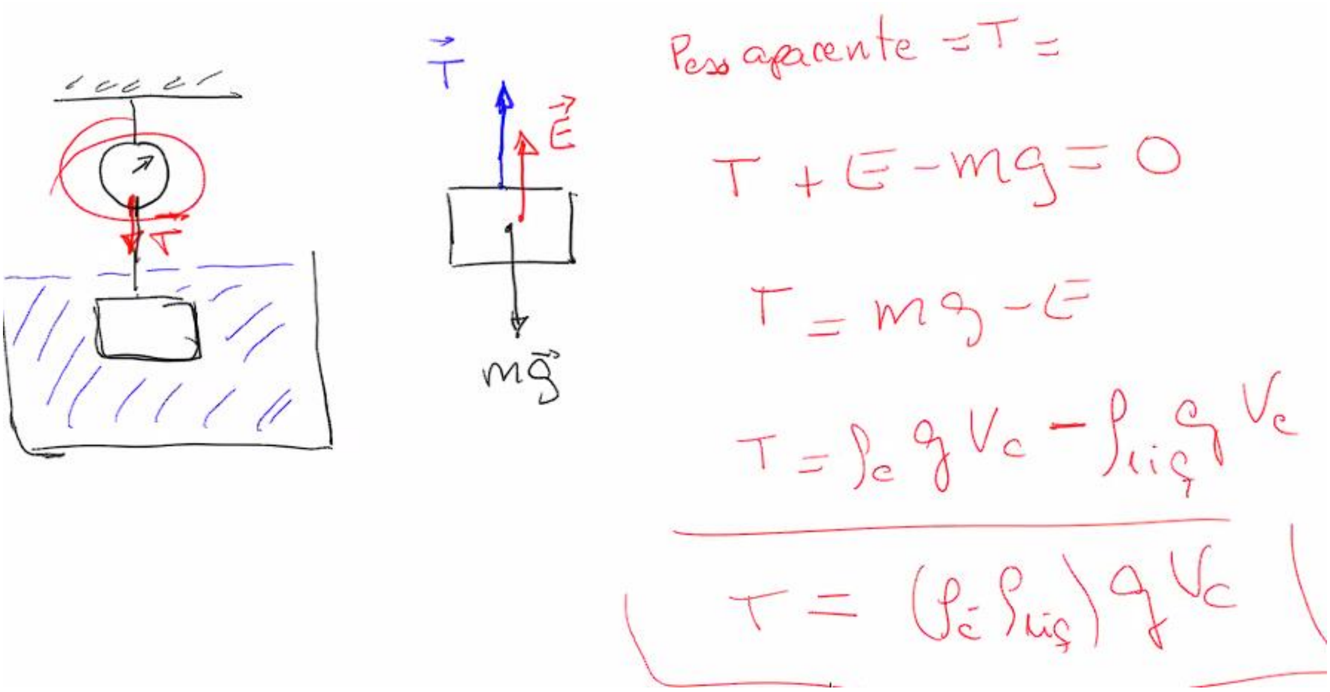
Si a esa bola de acero le empezamos a sacar material del interior y queda hueca, el empuje va a quedarse igual, porque el objeto tendrá el mismo volumen. Por otro lado, la fuerza peso va a disminuir.

$$E = \rho_{liq} . g . V_{cuerpo\ sumergido}$$

Sí $E > mg$ Entonces el objeto se moverá hacia arriba, hasta que alcance su punto de equilibrio donde $E = mg$ debido a que una porción del volumen será la que esté en contacto con el agua, donde se producirá un menor empuje.

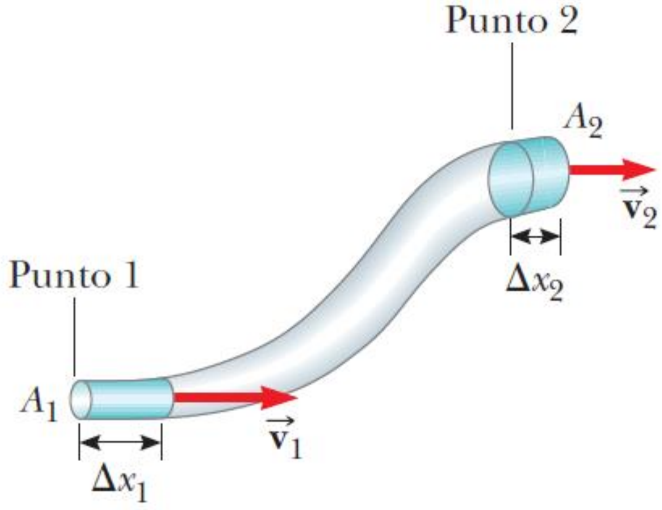
$$\rho_{liq} . g . v_{sum} = \rho_c . g . v_c$$

$$\rho_{liq} . v_{sum} = \rho_c . v_c \qquad \rightarrow \qquad v_{sum} = \frac{\rho_c}{\rho_{liq}} v_c$$



Dinámica de los fluidos

Ecuación de continuidad



Supongamos que tenemos un tubo que va cambiando su área perpendicular, o, diámetro, donde fluye un líquido incompresible

$$\rho = cte$$

Como la masa permanece constante:

$$A_1 . \Delta S_1 = A_2 . \Delta S_2$$

La velocidad de las partículas cambia:

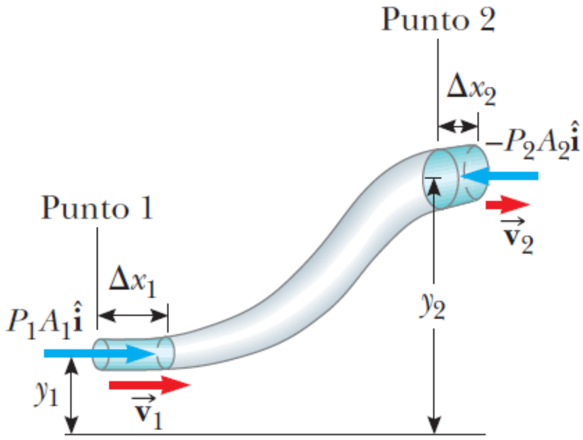
$$A_1 . \frac{\Delta S_1}{\Delta t} = A_2 . \frac{\Delta S_2}{\Delta t}$$

$$A_1 . v_1 = A_2 . v_2 \quad \rightarrow A . v = cte$$

Esto es lo que llamamos **Caudal o gasto**:

$$q = A . v \;\; [m^3/s]$$

Este caudal va a ser constante, porque el líquido es incompresible.
El caudal lo podemos medir en masa o en volumen, para medirlo en masa, solo multiplicamos por la densidad.



Teorema Bernoulli

El líquido es: No viscoso, Incompresible, Estacionario ($q = cte$ **en el tiempo)**, Irrotacional (sus partículas se mueven con la misma velocidad).

$F_1 = P_1 . A_1 \quad ; \quad F_2 = P_2 . A_2$ Fuerzas debidas a la presión del fluido

$$W_{FNC} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$(P_1 - P_2) . V = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_2 - m g y_1$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

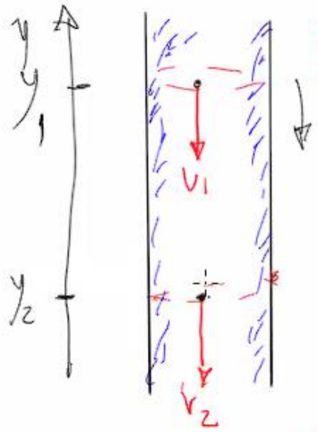
$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = cte$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli muestra que la presión de un fluido disminuye conforme la rapidez del fluido aumenta. Además, la presión disminuye conforme aumenta la elevación. Este último punto explica por qué la presión del agua de los grifos en los pisos superiores de un edificio alto es débil a menos que se tomen medidas para proporcionar mayor presión para dichos pisos.

Aplicaciones

Tubo con A: uniforme y vertical.



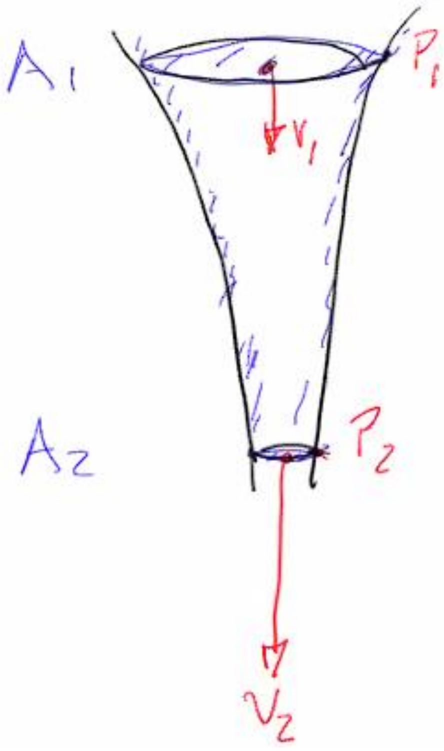
$v_1 = v_2$

$$P_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2} + \rho g y_1 = P_2 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_2^2} + \rho g y_2$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = -\rho g (y_1 - y_2)}$$

Otro ejemplo, donde la Presión se mantiene CTE:

$P_1 = P_2$



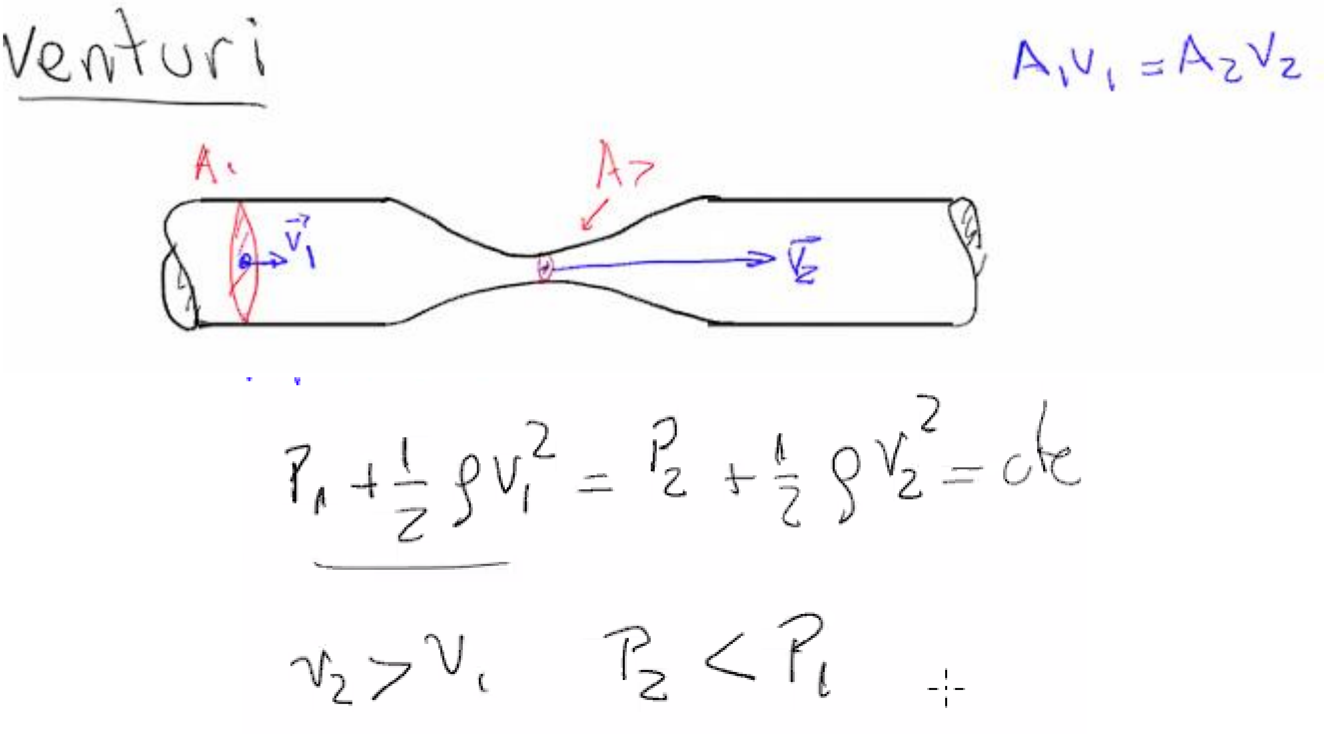
$$\frac{1}{2}\cancel{\rho} v_1^2 + \cancel{\rho} g y_1 = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2 + \cancel{\rho} g y_2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(y_1 - y_2)$$

$$v_1 = \frac{q}{A_1}, \quad v_2 = \frac{q}{A_2}$$

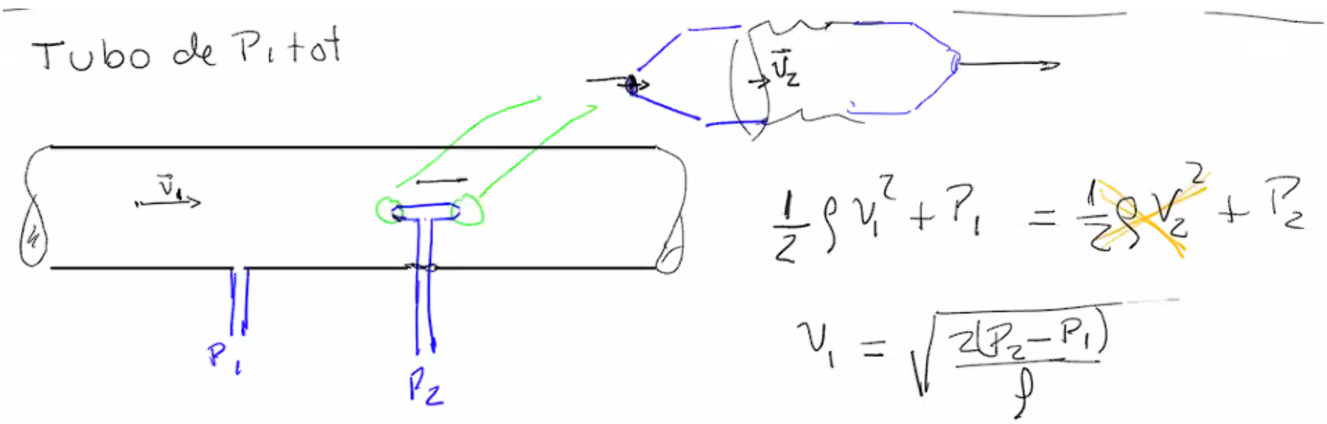
Tubo de Venturi:

Lo básico es que la relación entre las áreas nos dará la relación entre las velocidades.

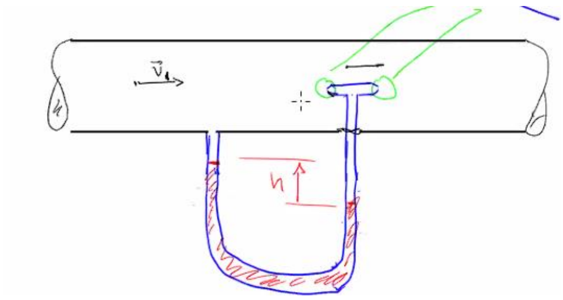


Tubo de Pitot:

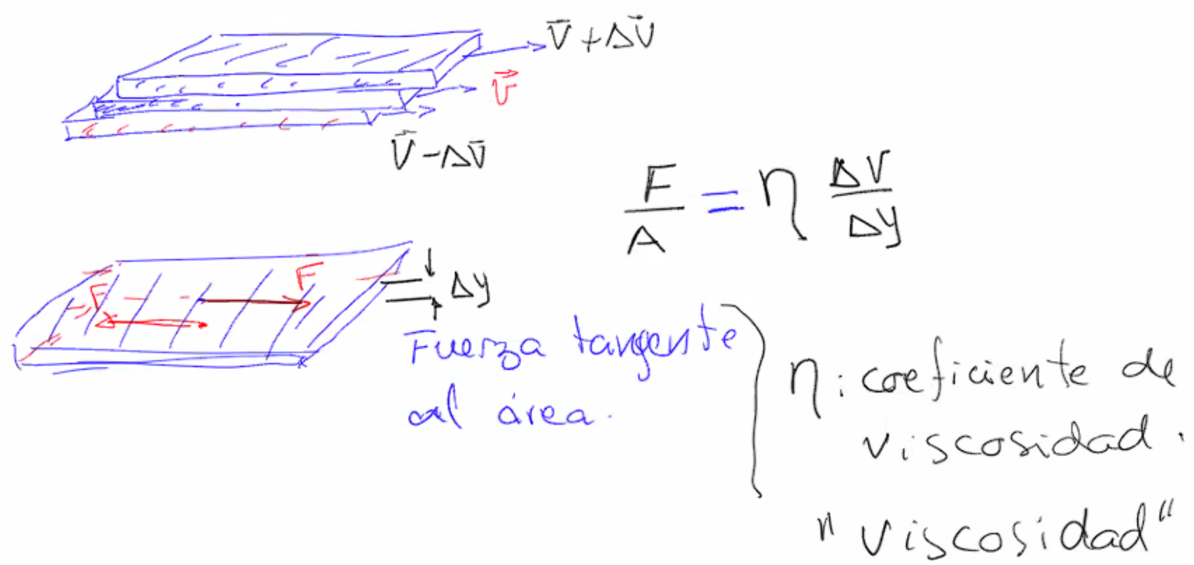
Este es utilizado para medir la velocidad de los fluidos, como en los aviones se mide la velocidad del aire.



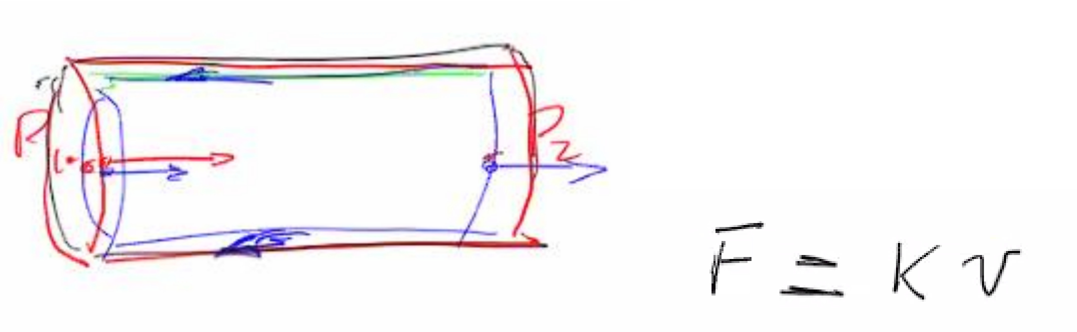
La forma más común en su medición es midiendo la diferencia de altura en la sig. imagen:



Viscosidad



Cada líquido tiene una viscosidad que depende de sus características y puede variar con la temperatura. *La viscosidad y la densidad no tienen nada que ver.*
El vidrio, debido a su composición interna, y su viscosidad hace que se comporte muy diferente a un sólido convencional.



Si el fluido se está moviendo más rápidamente, va a haber más resistencia a su movimiento.

Resumen

DEFINICIONES

La **presión** P en un fluido es la fuerza por unidad de área que ejerce el fluido sobre una superficie:

$$P \equiv \frac{F}{A} \qquad \textbf{(14.1)}$$

En el sistema SI, la presión tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2) y 1 N/m^2 = 1 **pascal** (Pa).

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La presión en un fluido en reposo varía con la profundidad h en el fluido de acuerdo con la expresión

$$P = P_0 + \rho g h \qquad \textbf{(14.4)}$$

donde P_0 es la presión en $h = 0$ y ρ es la densidad del fluido, que se supone uniforme.

La **ley de Pascal** afirma que, cuando se aplica presión a un fluido encerrado, la presión se transmite sin disminución a cualquier punto en el fluido y a todos los puntos en las paredes del contenedor.

Cuando un objeto está parcial o completamente sumergido en un fluido, el fluido ejerce sobre el objeto una fuerza hacia arriba llamada **fuerza de flotación (boyante)**. De acuerdo con el **principio de Arquímedes**, la magnitud de la fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el objeto:

$$B = \rho_{\text{fluido}} g V \qquad \textbf{(14.5)}$$

La relación de flujo (flujo volumétrico) a través de una tubería que varía en el área de sección transversal es constante; esto es equivalente a afirmar que el producto del área transversal A y la rapidez v en cualquier punto es una constante. Este resultado se expresa en la **ecuación de continuidad para fluidos**:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \qquad \textbf{(14.7)}$$

La suma de la presión, energía cinética por unidad de volumen y energía potencial gravitacional por unidad de volumen, tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de corriente para un fluido ideal. Este resultado se resume en la **ecuación de Bernoulli**:

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad \textbf{(14.9)}$$